

# Richtlinien für die statistische Auswertung von Sortieranalysen und Stückgewichtanalysen

---

---

**Klaus Felsenstein**

Institut für Stochastik  
und Wirtschaftsmathematik

Technische Universität Wien



**Bernhard Spangl**

Institut für Angewandte Statistik  
und EDV

Universität für Bodenkultur Wien



---

10.10.2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Statistisches Analysekonzept</b>	<b>2</b>
I.1	Berechnung von Fraktionsanteilen . . . . .	2
I.2	Berechnung von Konfidenzbereichen . . . . .	2
I.3	Festlegung einer Masseneinheit . . . . .	3
I.4	Methodische Bestimmung von Stückgewichten . . . . .	4
I.5	Fraktionengruppe . . . . .	4
I.6	Stichprobenplan . . . . .	5
I.7	Signifikante Unterschiede . . . . .	5
I.7.1	Beispiel Oberösterreich . . . . .	6
I.7.2	Beispiel Steiermark . . . . .	9
<b>II</b>	<b>A-priori Probenmassen</b>	<b>11</b>
II.1	Probenmassen für Stückgewichtsanalysen . . . . .	11
II.2	Tabellen für Mindestprobenmassen . . . . .	11
<b>III</b>	<b>Mathematische Methoden</b>	<b>24</b>
III.1	Anteilschätzung und Modellierung . . . . .	24
III.2	Konfidenzbereiche und Varianzen . . . . .	25
III.3	Mengenbestimmung unter Genauigkeitsvorgaben . . . . .	26
III.4	Methodische Bestimmung des Stückgewichts . . . . .	26
III.5	Test auf Unterschiede . . . . .	27
III.6	Probenplanung und Schichtungen . . . . .	28
III.6.1	Hierarchische Schichtung . . . . .	29
III.6.2	Gebundene Schichtung . . . . .	29
<b>IV</b>	<b>Nettofaktoren</b>	<b>30</b>
IV.1	Analysemengen . . . . .	30
IV.1.1	Schwankungsbreite $\pm 0.5\%$ . . . . .	30
IV.1.2	Schwankungsbreite $\pm 1\%$ . . . . .	31
IV.1.3	Schwankungsbreite $\pm 2\%$ . . . . .	31
IV.1.4	Schwankungsbreite $\pm 3\%$ . . . . .	32
IV.1.5	Schwankungsbreite $\pm 4\%$ . . . . .	32
IV.1.6	Schwankungsbreite $\pm 5\%$ . . . . .	32
IV.2	Genauigkeit der Nettoanteile . . . . .	32
	<b>Literatur</b>	<b>34</b>

# Abschnitt I

## Statistisches Analysekonzept

Eine einheitliche Vorgangsweise bei der methodischen Berechnung ermöglicht einen verlässlichen Vergleich der Analysen der Bundesländer und garantiert die Zuverlässigkeit der Resultate. Für die statistische Auswertung werden in der Folge Anleitungen gegeben.

### I.1 Berechnung von Fraktionsanteilen

Die Bestimmung der Fraktionsanteile einer Sortierfraktion besteht aus dem Quotienten von analysierter Gesamtmasse dieser Sortierfraktion zu der analysierten Gesamtmasse insgesamt. Damit müssen einzelne Anteilswerte verschiedener Proben bei der Durchschnittsberechnung mit der Masse der einzelnen Probe gewichtet werden.

Die Art der Probennahme (Behältergröße, Einwohnerzahl, oder sonstiges) darf keinen Einfluss auf die Anteilsberechnung haben, da sonst grobe Verzerrungen entstehen. In welchen Einheiten die Sammlung und die Analyse erfolgt darf keinen Einfluss auf den Anteilswert der Sortierfraktion haben. Generell sind daher innerhalb einer Schicht keine Einflüsse der Durchführung der Analyse, die von der konkreten Stichprobenauswahl abhängen, einzubringen. Dazu zählen beispielsweise die Stichprobenvarianz oder Variationskoeffizienten oder ähnliches.

### I.2 Berechnung von Konfidenzbereichen

Die Genauigkeit der Konfidenzbereiche wird mit 95% festgesetzt. Da die Anteile der Fraktionen verbunden sind und eine Zerlegung bilden, werden mehrdimensionale Konfidenzbereich auf Basis der Multinomialverteilung verwendet. Die Berechnungsmethoden für die Konfidenzbereiche von Parametern der Multinomialverteilung sind in der statistischen Fachliteratur detailliert beschrieben (Siehe etwa [4], [5], [6]). Als Standardverfahren für die Bestimmung von Konfidenzbereichen von Anteilen (hier Anteile der Sortierfraktionen) wird üblicherweise die Multinomialverteilung eingesetzt. Die Multinomialverteilung ist eine Zählverteilung, also eine diskrete Verteilung. Zur konkreten Berechnung wird eine multivariate Normalverteilung als Approximation verwendet. Dazu bedarf es einer Umrechnungszahl der Menge in ganzzahlige Einheiten. Der Konfidenzbereich muss zusätzlich in einzelne Intervalle für die Fraktionen dargestellt werden. Dafür sind die *Bonferroni-Methode* oder die *UI-Methode* geeignete Standardverfahren (siehe etwa [2]). Durch die Besonderheit der Kovarianzmatrix (Differenz von Diagonalmatrix und positiv definiten Matrix) ist beim Multinomialmodell die Bonferroni-Methode sogar verzichtbar.

Die verwendeten statistischen Verfahren und Annahmen müssen nachvollziehbar dokumentiert werden. Für alle statistische Berechnungen insbesondere aber für die Berechnung der Konfidenzintervalle wird dringend empfohlen, ausgewiesene Experten mit statistischer Ausbildung und Erfahrung heranzuziehen oder zumindest die methodische Prüfung durch Statistiker durchführen zu lassen. Jedenfalls sollten die verwendeten Methoden für die Berechnung der Konfidenzbereiche genau beschrieben werden, eine exakte methodische Beschreibung der mathematischen und statistischen Grundlagen der Berechnungen muss den Auswertungen beigelegt werden.

### I.3 Festlegung einer Masseneinheit

Die statistische Analyse verlangt prinzipiell eine Festlegung der Stichprobenanzahl. Da nur die Massen in der Restmüllanalyse erhoben werden, ist es erforderlich, eine Umrechnungszahl der Massen in eine Stichprobenanzahl festzulegen.

Die einzelnen Stücke im Restmüll haben oft Bestandteilen, die zu mehreren Fraktionen zu zählen sind. Die Durchschnittsgewichte (Stückgewichte) der einzelnen Fraktionen sind sehr unterschiedlich. Restmüllanalysen haben im Unterschied zur Analyse anderer Sammlungen die Schwierigkeit, eine Einheit für eine Fraktion zu bestimmen. Bei einer Sammlung mit genau unterscheidbaren Einheiten (Sammlung von verschiedenen Flaschen oder Metalldosen, Tetrapackungen, Kartons etc.) würde einfach das Stückgewicht einer Einheit als zuordenbare Masse einer Fraktion verwendet. Bei Restmüllsammlungen ist das nicht möglich, daher muss eine solche Kennzahl definiert werden, vergleichbar mit der Definition einer Stimme für eine Partei bei einer politischen Wahl.

Die Bestimmung eines Stückgewichts ist nur für **unteilbare**, einer Fraktion zuordenbare Einheiten erforderlich. Es dient zur Festlegung der Masse einer Sortiereinheit, hat aber keine Auswirkung auf die Anteilsschätzung der Fraktionen. Das bestimmte Stückgewicht wird dann auch als Einheitsmasse für lose, vermischte oder zerteilte Massen angesetzt. Die Zählung erfolgt nur für unteilbare Einheiten, die eindeutig einer Fraktion zugeteilt werden können und mindestens über einem unteren Schwellenwert (20g) liegen. Dieser Schwellenwert sollte nicht zu gering angesetzt werden, da sonst die Messgenauigkeit der Sortieranalyse von der Genauigkeit der Stückgewichtsanalyse übertroffen wird, und eigentlich als 'Pseudogenauigkeit' auftritt.

Die Festlegung der Masseneinheit ist als Eichung für die Bestimmung erforderlicher Massen, um eine geforderte Genauigkeit zu erreichen, zu verstehen. Es könnte auch auf das Stückgewicht verzichtet werden, was dann  $\rho = 1 \text{ kg}$  als physikalische Einheit entspricht. Das wird aber der Durchführung der Sortieranalyse nicht gerecht, da die Stücke einer Fraktion nur in sehr selten Fällen dieses Gewicht erreichen. Die Masseneinheit muss an die konkrete Durchführung der Sortieranalyse angepasst werden. Im Zuge der Sortieranalyse ist nach einer vom Versuchsplan vorgegeben Stückzahl (oder Probenmasse) das durchschnittliche Stückgewicht zu ermitteln.

Die Stückgewichtsanalyse sollte in allen Bundesländern im Rahmen der Sortieranalyse durchgeführt werden und das aggregierte Resultat (einheitliche Stückgewichtsschätzung) wird dann für die Auswertung in allen Bundesländern eingesetzt. Es genügt die Stückgewichtsanalyse nach einem einfachen randomisierten Versuchsplan ohne spezielle Schichtungen durchzuführen. So wird beispielsweise eine Stückgewichtsanalyse bei jeder 20. Probe der Sortieranalyse durchgeführt. Das spezifische Gewicht von Einheiten ist nicht von Faktoren (Region, Sammelbehälter, Jahreszeit etc.) abhängig.

## I.4 Methodische Bestimmung von Stückgewichten

Die Bestimmung eines durchschnittlichen Stückgewichts erfolgt unter Berücksichtigung folgender Kriterien der Analysenahme.

Als eine zu messende *Einheit* ist ein eindeutig zuordenbares Stück einer Fraktion oder eine zusammengehörige Masse dieser Fraktion.

Willkürlich ausgewählte Beispiele zu Stücken sind: Flaschen, Dosen, Kunststoffverpackungen, Kunststoffbecher, Futter- oder Lebensmittelschalen, Glas- oder Holzplatten, Karton, Folien, Bekleidungsstück, Blumentopf, Windel, Spraydose, Buch, Sack, Leuchtmittel, Metall- oder Holzstab, Keramikstück, Papierrolle, Schreibstift, Batterie oder Elektrokleingerät, Flakon für Chemikalien, Medikamente oder Kosmetika, Papiertuch, Stein und vieles mehr.

Willkürlich ausgewählte Beispiele zu zusammengehörige Massen (in Verpackung oder lose aber eindeutig aus dem selben Wurf) sind: Obst- oder Gemüseschalen, Restflüssigkeiten aus Flaschen bzw. beliebigen Gebinden, Speisereste aus Verpackung oder Gebinde, Katzenstreu, Ofen- oder Zigarettenasche, Sägespäne, Bauschutt, Zeitschrift oder Dokument in losen Blättern, gehäckselte oder geschredderte Papier oder Holzmaterialien, zerbrochene Glas oder Keramikgegenstände u.v.m. . In der Stückgewichtsanalyse werden einzelne Gewichte der Stücke bzw. zusammengehörigen Massen nicht bestimmt. Nur die Anzahl der Stücke wird gezählt und die gesamt Masse dieser Fraktion gewogen. Daraus ergibt sich das Durchschnittsgewicht der Stücke einer Fraktion und das gesuchte Durchschnittsgewicht für alle Fraktionen.

Um Messfehler und unrealistisch geringe Stückgewichte zu vermeiden, wird eine *Mindestmasse* für Stücke und Massen vorgegeben. Stücke oder zusammengehörige Massen unter **20 g** werden in die Bestimmung von Stückgewichten nicht einbezogen. Das bedeutet **nicht**, dass Fraktionen, in die Stücke mit weniger als 20 g fallen, ungenauer bzw. in anderer Art gemessen werden als Fraktionen, die schwerere Stücke enthalten. Es wird nur eine Eichung der Gewichtszuordnung vorgenommen. Selbst Fraktionen, die durch die Massenbeschränkung eigentlich nicht vorkommen können, wie beispielsweise die Fraktion Siebrest, werden nach der Bestimmung des Stückgewichts, mit gleicher Genauigkeit und mit identischen statistischen Ansätzen behandelt. Die Anteile solcher Fraktionen werden völlig paritätisch zu anderen Fraktionen in der Restmüllanalyse bestimmt. Im Abschnitt II.1 werden benötigte Massen bzw. Stückzahlen für eine brauchbare Bestimmung des Stückgewichts angegeben.

## I.5 Fraktionengruppe

Das Prinzip der Berechnung von Anteilen und Konfidenzbereichen bleibt gleich, wenn anstatt aller 21 Fraktionen nur eine Fraktionengruppe betrachtet wird. Alle anderen Fraktionen (Rest) werden zu einer Fraktion zusammengefasst. Dann wird die größte Fraktion (Massenanteile) aus der Fraktionengruppe ausgewählt und für diese Fraktion die benötigte Analysemasse bestimmt. Es kann dabei oft vorkommen, dass die größte Fraktion die Restfraktion ist. Generell werden die benötigten Analysemengen geringer, wenn nur eine Fraktionengruppe statt aller 21 Fraktionen betrachtet wird.

Generell bestimmt der Genauigkeitsanspruch der größten Fraktion die benötigte Analysemasse. Werden unterschiedliche Genauigkeiten für verschiedene Fraktionen gefordert, wird der folgende Algorithmus zu Bestimmung der benötigten Analysemasse vorgeschlagen: Für jede Fraktion wird abhängig von dem erwarteten Fraktionsanteil und der geforderten Genauigkeit die benötigte Analysemasse bestimmt. Das Maximum dieser vorab bestimmten Analysemassen legt dann die letztendlich benötigte Analysemasse fest.

## I.6 Stichprobenplan

Die im folgenden Abschnitt angegebenen Analysemengen (Probemassen) zum Erreichen einer vorgegebenen Genauigkeit setzen einen vollständig ausgewogenen Stichprobenplan voraus. Die Aufteilung der Gesamtsammelmenge soll für Faktoren und Schichten (Bezirke, Behältertyp, Art der Region (urban, ländlich), Sammelsystem oder Jahreszeitabhängigkeit besonders in Tourismusregionen u.v.m.) den aliquoten Anteil bei der Analysemengen vorsehen. Wenn für eine Fraktion in einer Schicht eine eigene Genauigkeit vorgegeben wird, die eine höhere Analysemenge erfordert, dann wird diese höhere Analysemenge in dieser Schicht festgesetzt. Für die Gesamtauswertung wird aber die Menge auf die ursprüngliche in dieser Region benötigte Menge zurückgesetzt. Dadurch geht zwar (etwas) Information verloren, aber die Ausgewogenheit des Stichprobenplans bleibt erhalten.

Es wird empfohlen, nur für eine Schichtung (eventuell unterschiedliche) Genauigkeiten für die Fraktionen anzugeben. Prinzipiell lassen sich beliebig viele Vorgaben im Modell realisieren. Dadurch steigen aber die notwendigen Analysemassen erheblich und für Vergleiche von verschiedenen Analysen ist die gleiche Genauigkeit der verschiedenen Analysen nicht erforderlich (siehe Abschnitt III.5).

### **Musterrechnung:**

Die hier verwendeten Kennzahlen sind nur exemplarisch und entsprechen nicht den Mengen und Anteilen in den Tabellen aus Abschnitt 2.

Die Gesamtrestmüllmenge in einem Bundesland betrage 100.000 t und es wird eine Gesamtgenauigkeit von  $\pm 2\%$  festgesetzt, dafür wird eine Analysemenge von 50 t benötigt.

Ein Bezirk hat 10% der Gesamtrestmüllmenge des Bundeslandes, daher sollen in diesem Bezirk 5 t analysiert werden. Besteht die Sammlung in diesem Bezirk aus 40% Behältertyp A und 60% Behältertyp B, dann werden 2 t aus Behältertyp A und 3 t aus Behältertyp B analysiert.

Für eine Fraktionengruppe soll die Genauigkeit in diesem Bezirk  $\pm 1\%$  betragen, dafür sind aber 8 t Analysemenge erforderlich. Diese 8 t werden analog 40% Behältertyp A und 60% Behältertyp B aufgeteilt.

Für die Gesamtauswertung für das Bundesland werden alle Fraktionsmengen dieses Bezirks mit  $5/8 = 0.625$  gewichtet. Beträgt die Analysemenge einer Fraktion in diesem Bezirk etwa 1 t, dann werden zur Gesamtmenge des Bundesland für diese Fraktion 625 kg addiert.

Diese gewichtete Mischung der Anteile lässt sich nicht auf die Konfidenzbereiche übertragen. Eine gewichtete Mischung der Intervallgrenzen oder Abweichungen ergibt keine brauchbare Abschätzung für den Konfidenzbereich der Fraktionen in der Bundeslandauswertung. Die Konfidenzintervalle werden nach der Zuordnung und Gewichtung der Proben neu berechnet.

Es wird dringend empfohlen, die optimale Aufteilung der Analysemengen mittels einer Software zu bestimmen, die als Ausgangsdaten die letztverfügbaren Sammelmengen und die Genauigkeitsanforderungen gemäß obiger Methode enthält.

## I.7 Signifikante Unterschiede

Die Analyseergebnisse können für die Entscheidung dienen, ob die Fraktionsanteile Unterschiede in Regionen (oder Unterschiede bei Behältergrößen, Jahreszeiten, etc.) aufweisen. Unterschiedliche Analysewerte können aber zufällig sein und beweisen allein noch nicht, dass tatsächlich Unterschiede in der Sammlung vorliegen.

Die Prüfung von Resultaten auf Unterschiede (etwa Vergleich von Regionen, Behältertypen oder

Bezirksaufteilungen) erfolgt mit einem statistischen Test unter Annahme von zwei Stichproben von Multinomialverteilungen. Auch für diesen Test wird das Niveau  $\alpha = 5\%$  (Irrtumswahrscheinlichkeit) festgelegt. Hier gelten dieselben Modellvoraussetzungen wie für Konfidenzbereiche. (Siehe [4], [5], [6]). Für das Erkennen von Unterschieden ist die Durchführung eines solchen statistischen Tests unerlässlich, um signifikante Unterschiede nachzuweisen. Weisen die Fraktionsanteile prinzipielle Unterschiede auf, so ist keinesfalls sicher, ob diese Unterschiede zufällig oder strukturell sind und können ohne Test nicht erkannt werden bzw. zu irreführenden Schlussfolgerungen führen.

Der Vergleich von Analysen wird mit einem einfachen Test auf identische Anteile durchgeführt, der auch direkt mit Mengen (ohne Umrechnung mit dem Massenäquivalent) auskommt (Kontingenztafeltest). Es ist nicht erforderlich, dass den zu vergleichenden Analysen vergleichbar große Massen zugrunde liegen. Sollte aber die gesamte Analysemenge für einen Vergleich zu gering sein, kann kein signifikanter Unterschied erkannt werden.

### I.7.1 Beispiel Oberösterreich

Exemplarisch wurde anhand der Restmüllzusammensetzung von Gemeinden aus Oberösterreich aus dem Jahr 2013 getestet, ob die Fraktionsanteile der gewählten sozio-ökonomischen Schichten Unterschiede aufweisen. Statistische Tests analog zu der in Abschnitt III.5 beschriebenen Methodik wurden für das gesamte Bundesland als auch für die einzelnen Bezirke getrennt durchgeführt. Es wurden drei und fünf sozio-ökonomische Schichten betrachtet. Weiters wurden vier Fraktionen (Leichtverpackung, Biogene Abfälle, Hygieneartikel, Rest) verwendet.

Für das gesamte Bundesland erhält man bei Verwendung von drei sozio-ökonomischen Schichten einen  $p$ -Wert von  $p < 0.001$  und bei Verwendung von fünf Schichten einen  $p$ -Wert von  $p < 0.001$ . Somit gibt es in beiden Fällen einen signifikanten Unterschied der Fraktionsanteile in den einzelnen Schichten.

Zusätzlich wurden bei Vorhandensein von zwei oder mehr sozio-ökonomischen Schichten in den einzelnen Bezirken alle paarweisen Vergleiche durchgeführt. Die Tabellen I.1 und I.2 enthalten die  $p$ -Werte des paarweisen Schichtvergleichs der 3er und 5er Schichtung gegliedert in "Gesamt" und die einzelnen Bezirke, wobei leere Zellen andeuten, dass diese Paarungen nicht existieren.

Tabelle I.1: P-Werte des paarweisen Schichtvergleichs der 3er Schichtung

	1 with 2	1 with 3	2 with 3
Gesamt	0.001	0.000	0.000
Braunau	0.001	0.000	0.102
Eferding	0.002	0.000	0.170
Freistadt		0.000	
Gmunden	0.000	0.848	0.000
Grieskirchen		0.001	
Kirchdorf			0.000
Linz			
Linz-Land	0.000	0.293	0.047
Perg			0.000
Ried	0.553	0.002	0.000
Rohrbach			0.000
Schärding	0.000	0.081	0.000
Steyr-Land			
Steyr Stadt			
Urfahr Umgebung			0.000
Vöcklabruck	0.249	0.041	0.017
Wels			
Wels-Land	0.003	0.000	0.000

Tabelle I.2: P-Werte des paarweisen Schichtvergleichs der 5er Schichtung

	1 with 2	1 with 3	1 with 4	1 with 5	2 with 3	2 with 4	2 with 5	3 with 4	3 with 5	4 with 5
Gesamt	0.197	0.513	0.000	0.000	0.183	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Braunau					0.720	0.000	0.001	0.000	0.172	0.000
Eferding	0.002			0.000			0.170			
Freistadt							0.000			
Gmunden	0.000		0.000	0.848		0.196	0.000			0.000
Grieskirchen							0.001			
Kirchdorf						0.000	0.001			0.726
Linz										
Linz-Land	0.281		0.001	0.311		0.001	0.129			0.001
Perg							0.000			
Ried	0.553		0.075	0.000		0.577	0.000			0.000
Rohrbach										0.189
Schärding		0.000		0.081					0.000	
Steyr-Land								0.007		
Steyr Stadt										
Urfahr Umgebung									0.000	
Vöcklabruck	0.001	0.062	0.145	0.020	0.014	0.110	0.088	0.641	0.398	0.323
Wels										
Wels-Land					0.012		0.000		0.033	

∞

## I.7.2 Beispiel Steiermark

Exemplarisch wurde anhand der Restmüllzusammensetzung von Gemeinden aus der Steiermark aus dem Jahr 2011 getestet, ob die Fraktionsanteile der gewählten sozio-ökonomischen Schichten Unterschiede aufweisen. Statistische Tests analog zu der in Abschnitt III.5 beschriebenen Methodik wurden für das gesamte Bundesland als auch für die einzelnen Bezirke getrennt durchgeführt. Es wurden drei und fünf sozio-ökonomische Schichten betrachtet. Weiters wurden vier Fraktionen (Leichtverpackung, Biogene Abfälle, Hygieneartikel, Rest) verwendet.

Für das gesamte Bundesland erhält man bei Verwendung von drei sozio-ökonomischen Schichten einen  $p$ -Wert von  $p < 0.001$  und bei Verwendung von fünf Schichten einen  $p$ -Wert von  $p < 0.001$ . Somit gibt es in beiden Fällen einen signifikanten Unterschied der Fraktionsanteile in den einzelnen Schichten.

Zusätzlich wurden bei Vorhandensein von zwei oder mehr sozio-ökonomischen Schichten in den einzelnen Bezirken alle paarweisen Vergleiche durchgeführt. Die Tabellen I.3 und I.4 enthalten die  $p$ -Werte des paarweisen Schichtvergleichs der 3er und 5er Schichtung gegliedert in "Gesamt" und die einzelnen Bezirke, wobei leere Zellen andeuten, dass diese Paarungen nicht existieren.

Tabelle I.3: P-Werte des paarweisen Schichtvergleichs der 3er Schichtung

	1 with 2	1 with 3	2 with 3
Gesamt	0.000	0.000	0.073
A			0.000
B		0.613	
C		0.067	
D		0.523	
E			0.128
F			
G			0.000
H			
I			
J		0.000	
K			0.551
L			0.000
M			
N			
O			
P			0.000
Q			

Tabelle I.4: P-Werte des paarweisen Schichtvergleichs der 5er Schichtung

	1 with 2	1 with 3	1 with 4	1 with 5	2 with 3	2 with 4	2 with 5	3 with 4	3 with 5	4 with 5
Gesamt	0.062	0.006	0.126	0.000	0.238	0.077	0.000	0.316	0.331	0.047
A					0.805		0.003		0.009	
B							0.613			
C						0.067				
D							0.523			
E									0.128	
F										
G							0.000			
H										
I										
J							0.000			
K								0.000	0.479	0.001
L						0.000				
M								0.064		
N						0.000				
O								0.015		
P									0.000	
Q										

## Abschnitt II

# A-priori Probenmassen

### II.1 Probenmassen für Stückgewichtsanalysen

Für Stückgewichte  $\rho$  existieren bisher nur wenige Stichproben oder Abschätzungen. Dabei wurden auch lose und kleine Stoffpartikel gezählt, wodurch die Stückgewichte verzerrt und unterschätzt werden. Nach der Methode aus Abschnitt III.4 können aus Voruntersuchungen Schranken und a-priori Werte ermittelt werden. Durch Elimination zu geringer Massen wurde  $\rho = 0.083$  mit  $S_G^2 = 0.24$  aus der Voruntersuchung ermittelt.

Mit der Schranke  $M = 0.6$  und  $m = 21$  für die Anzahl der Fraktionen und die Schwankungsbreite  $L = \pm 0.012$  ergibt sich als Probenzahl  $K \leq 10878.11$ .

Der Versuchsplan würde als Probenzahl etwa **10.900** Stück mit einer erwarteten Probenmasse zwischen 800 – 1000kg vorsehen. Diese Anzahl wird auf alle Bundesländer aliquot aufgeteilt.

### II.2 Tabellen für Mindestprobenmassen

Im folgenden wird als 'relevante Gruppe' jene Fraktion bezeichnet, für die die Genauigkeitsvorgabe gelten soll oder die größte Fraktion unter jenen, für die die Genauigkeitsvorgabe gelten soll. In der Tabelle ist diese Hauptgruppe (HG) zwischen 1% und 40% enthalten. Da auch die Anzahl der Fraktionen die Schwankungsbreite beeinflusst, werden die Probenmassen für 21 Fraktionen oder geringeren Zahlen von Fraktionen (bei Zusammenfassung von Kategorien) angegeben. Die Überdeckungswahrscheinlichkeit ist einheitlich 95%. Für die Umrechnung von Menge in Anzahl werden als Masseneinheiten  $\rho = 0.1, 0.2, 0.3 \text{ kg}$  verwendet.

Die angegebenen Mengen stellen die absoluten Mindestmengen für den Stichprobenplan dar, wenn die Fraktionsaufteilung in den Behältern völlig zufällig und gleichmäßig verteilt in der vorliegenden Faktorenstichprobe angenommen wird. Für das Erkennen weiterer Faktoren bzw. bei strukturierter Verteilung in den Behältern reicht im allgemeinen die Mindeststichprobenmenge nicht aus.

Die benötigten Analysemassen können mit dem Modell der Multinomialverteilung klein gehalten werden, da zusätzliche (irreführende) Schwankungen, die aus der Verteilung der Proben oder andere Störfaktoren bestehen, nicht einbezogen werden. Es wird aber empfohlen, die größte, vertretbare Analysemasse zu wählen, da eventuell Einflussfaktoren auch von erfahrenen Experten und Praktikern nicht erkannt werden oder allgemein unterschätzt wurden. Generell sollen die Analysen möglichst zufällig (**randomisiert**) unter den vorgegebenen Nebenbedingungen durchgeführt werden. Die folgenden Tabellen enthalten Mindestmengen für  $\rho = 0.1, 0.2, 0.3 \text{ kg}$  und Schwankungsbreiten von 1%, 2%, 4%, 10%.

Schwankungsbreite:  $\pm 1 \%$

$\rho = 0.1$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	45	71	92	112	131	149	166	183	200	216	232	248	264	280	295	311	326	341	356	371
2	79	123	161	196	228	260	290	320	349	377	406	433	461	488	515	542	569	595	621	647
3	114	178	232	282	329	374	418	461	503	544	585	625	665	704	743	782	820	859	896	934
4	149	233	304	369	430	489	546	602	657	711	764	817	869	920	971	1021	1072	1121	1171	1220
5	184	287	374	454	529	602	673	742	809	875	941	1006	1069	1133	1195	1258	1319	1381	1442	1502
6	218	339	443	537	627	713	797	878	958	1037	1114	1191	1267	1342	1416	1489	1563	1635	1707	1779
7	251	391	510	619	723	822	918	1012	1105	1195	1284	1373	1460	1546	1632	1717	1801	1885	1968	2051
8	283	442	576	700	816	928	1037	1143	1248	1350	1451	1550	1649	1746	1843	1939	2034	2129	2223	2316
9	315	491	641	778	908	1033	1154	1272	1387	1501	1613	1724	1834	1942	2050	2156	2262	2367	2472	2576
10	346	540	704	855	997	1134	1267	1397	1524	1649	1772	1894	2014	2133	2252	2369	2485	2600	2715	2829
11	376	587	765	929	1084	1233	1378	1519	1657	1793	1927	2060	2190	2320	2448	2576	2702	2828	2953	3077
12	406	633	826	1002	1169	1330	1486	1638	1787	1934	2078	2221	2362	2502	2640	2778	2914	3050	3184	3318
13	435	678	884	1073	1252	1424	1591	1754	1914	2071	2226	2378	2530	2679	2828	2975	3121	3266	3410	3553
14	463	721	941	1142	1333	1516	1694	1867	2037	2204	2369	2532	2693	2852	3010	3166	3322	3476	3630	3782
15	490	764	996	1210	1411	1605	1794	1977	2157	2334	2509	2681	2851	3020	3187	3353	3517	3681	3843	4005
16	516	805	1050	1275	1488	1692	1890	2084	2274	2460	2644	2826	3005	3183	3359	3534	3707	3880	4051	4221
17	542	845	1102	1339	1562	1776	1985	2188	2387	2583	2776	2966	3155	3341	3526	3710	3892	4073	4253	4431
18	567	884	1153	1400	1634	1858	2076	2288	2497	2702	2903	3103	3300	3495	3689	3881	4071	4260	4448	4635
19	591	922	1202	1460	1703	1937	2164	2386	2603	2817	3027	3235	3441	3644	3846	4046	4245	4442	4638	4833
20	614	958	1250	1518	1771	2014	2250	2480	2706	2928	3147	3363	3577	3789	3998	4206	4413	4618	4822	5024
21	637	994	1296	1574	1836	2088	2333	2572	2806	3036	3263	3487	3709	3928	4146	4361	4575	4788	4999	5209
22	659	1028	1341	1628	1899	2160	2413	2660	2902	3140	3375	3607	3836	4063	4288	4511	4732	4952	5171	5388
23	680	1061	1384	1680	1960	2229	2490	2745	2995	3241	3483	3722	3959	4193	4425	4656	4884	5111	5337	5561
24	700	1092	1425	1730	2019	2296	2565	2828	3085	3338	3588	3834	4077	4319	4558	4795	5030	5264	5496	5727
25	720	1123	1465	1778	2075	2360	2637	2907	3171	3431	3688	3941	4191	4439	4685	4929	5171	5411	5650	5887
26	739	1152	1503	1825	2129	2422	2706	2983	3254	3521	3784	4044	4301	4555	4807	5058	5306	5552	5798	6041
27	757	1180	1540	1869	2181	2481	2772	3055	3333	3607	3877	4143	4406	4667	4925	5181	5435	5688	5939	6189
28	774	1207	1575	1912	2231	2538	2835	3125	3410	3689	3965	4237	4506	4773	5037	5299	5559	5818	6075	6330
29	791	1233	1608	1953	2279	2592	2895	3192	3482	3768	4050	4328	4603	4875	5145	5412	5678	5942	6204	6465
30	806	1258	1640	1992	2324	2643	2953	3255	3552	3843	4130	4414	4694	4972	5247	5520	5791	6060	6328	6594
31	821	1281	1671	2029	2367	2692	3008	3316	3618	3914	4207	4496	4781	5064	5345	5623	5899	6173	6445	6716
32	836	1303	1700	2064	2408	2739	3060	3373	3680	3982	4280	4573	4864	5152	5437	5720	6001	6280	6557	6832
33	849	1324	1727	2097	2447	2783	3109	3427	3739	4046	4348	4647	4942	5235	5524	5812	6097	6380	6662	6942
34	862	1344	1753	2128	2483	2824	3155	3478	3795	4106	4413	4716	5016	5313	5607	5899	6188	6476	6762	7046
35	874	1363	1777	2158	2518	2863	3199	3527	3848	4163	4474	4782	5085	5386	5684	5980	6274	6565	6855	7143
36	885	1380	1800	2185	2550	2900	3240	3571	3897	4216	4531	4842	5150	5455	5757	6056	6354	6649	6942	7234
37	895	1396	1821	2211	2580	2934	3278	3613	3942	4266	4584	4899	5211	5519	5824	6127	6428	6727	7024	7319
38	905	1411	1840	2234	2607	2965	3313	3652	3985	4311	4634	4952	5266	5578	5887	6193	6497	6799	7099	7397
39	914	1425	1858	2256	2633	2994	3345	3688	4023	4354	4679	5000	5318	5632	5944	6253	6560	6865	7168	7470
40	922	1437	1875	2276	2656	3021	3375	3720	4059	4392	4720	5044	5365	5682	5997	6309	6618	6926	7232	7535

Schwankungsbreite:  $\pm 2 \%$

$\rho = 0.1$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	15	23	30	37	43	49	55	60	66	71	76	82	87	92	97	102	107	112	117	122
2	22	35	45	55	64	73	81	90	98	106	114	122	129	137	144	152	159	167	174	182
3	30	47	61	75	87	99	111	122	133	144	155	165	176	186	197	207	217	227	237	247
4	39	60	78	95	111	126	141	155	170	183	197	211	224	237	251	264	276	289	302	315
5	47	73	95	116	135	153	171	189	206	223	240	256	273	289	305	320	336	352	367	383
6	55	86	112	136	159	181	202	222	243	262	282	301	321	340	358	377	395	414	432	450
7	63	99	129	156	182	207	231	255	278	301	324	346	368	390	411	433	454	475	496	517
8	71	111	145	176	205	233	261	287	314	339	365	390	415	439	463	487	511	535	559	582
9	79	123	161	195	228	259	289	319	348	377	405	433	460	487	514	541	568	594	620	646
10	87	135	176	214	250	284	318	350	382	413	444	475	505	535	564	594	623	652	681	709
11	94	147	192	233	272	309	345	380	415	449	483	516	549	581	613	645	677	708	739	770
12	102	158	207	251	293	333	372	410	447	484	520	556	591	626	661	695	729	763	797	830
13	109	170	221	268	313	356	398	439	479	518	557	595	633	670	707	744	781	817	853	889
14	116	180	235	286	333	379	424	467	509	551	592	633	673	713	753	792	831	869	908	946
15	122	191	249	302	353	401	448	494	539	583	627	670	713	755	797	838	879	920	961	1001
16	129	201	262	319	372	423	472	521	568	615	661	706	751	795	840	883	927	970	1012	1055
17	135	211	275	334	390	444	496	547	596	645	694	741	788	835	881	927	973	1018	1063	1107
18	142	221	288	350	408	464	519	572	624	675	725	775	824	873	922	970	1017	1064	1111	1158
19	148	230	300	365	426	484	541	596	650	704	756	808	860	910	961	1011	1060	1110	1159	1207
20	153	239	312	379	442	503	562	620	676	731	786	840	894	946	999	1051	1102	1154	1204	1255
21	159	248	324	393	459	522	583	642	701	758	815	871	926	981	1035	1089	1143	1196	1249	1301
22	165	257	335	407	474	539	603	664	725	784	843	901	958	1015	1071	1127	1182	1237	1292	1346
23	170	265	346	420	489	557	622	686	748	809	870	930	989	1047	1105	1163	1220	1276	1333	1389
24	175	273	356	432	504	573	641	706	770	834	896	957	1018	1079	1138	1197	1256	1315	1373	1430
25	180	280	366	444	518	589	658	726	792	857	921	984	1047	1109	1170	1231	1291	1351	1411	1470
26	185	288	375	456	532	605	676	745	813	879	945	1010	1074	1138	1201	1263	1325	1387	1448	1509
27	189	295	384	467	545	620	692	763	832	901	968	1035	1100	1165	1230	1294	1357	1420	1483	1545
28	193	302	393	477	557	634	708	780	851	921	990	1058	1125	1192	1258	1323	1388	1453	1517	1581
29	197	308	402	488	569	647	723	797	870	941	1011	1081	1149	1217	1285	1352	1418	1484	1549	1614
30	201	314	410	497	580	660	737	813	887	960	1031	1102	1172	1242	1310	1378	1446	1513	1580	1647
31	205	320	417	507	591	672	751	828	903	977	1050	1123	1194	1265	1335	1404	1473	1541	1609	1677
32	209	325	424	515	601	684	764	842	919	994	1069	1142	1215	1286	1358	1428	1498	1568	1637	1706
33	212	331	431	524	611	695	776	856	934	1010	1086	1160	1234	1307	1379	1451	1522	1593	1664	1733
34	215	336	438	531	620	705	788	869	948	1025	1102	1178	1253	1327	1400	1473	1545	1617	1688	1759
35	218	340	444	539	629	715	799	881	961	1040	1117	1194	1270	1345	1419	1493	1567	1639	1712	1784
36	221	345	449	546	637	724	809	892	973	1053	1131	1209	1286	1362	1437	1512	1586	1660	1734	1806
37	224	349	455	552	644	733	818	902	984	1065	1145	1223	1301	1378	1454	1530	1605	1680	1754	1828
38	226	352	460	558	651	740	827	912	995	1077	1157	1236	1315	1393	1470	1546	1622	1698	1773	1847
39	228	356	464	563	657	748	835	921	1005	1087	1168	1249	1328	1406	1484	1561	1638	1714	1790	1865
40	230	359	468	568	663	754	843	929	1014	1097	1179	1260	1340	1419	1497	1575	1653	1729	1806	1882

Schwankungsbreite:  $\pm 4 \%$

$\rho = 0.1$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	6	9	12	14	16	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	44	46
2	7	11	15	18	21	23	26	29	31	34	37	39	42	44	46	49	51	54	56	58
3	9	14	18	22	25	29	32	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72
4	11	17	22	26	31	35	39	43	47	51	54	58	62	65	69	73	76	80	83	87
5	12	19	25	31	36	41	46	50	55	59	64	68	73	77	81	85	90	94	98	102
6	14	22	29	35	41	47	53	58	63	68	74	79	84	89	93	98	103	108	113	117
7	16	25	33	40	47	53	60	66	72	78	83	89	95	100	106	111	117	122	128	133
8	18	28	37	45	52	60	67	73	80	87	93	99	106	112	118	124	130	137	143	149
9	20	31	41	49	58	66	73	81	88	95	103	110	117	124	130	137	144	151	157	164
10	22	34	45	54	63	72	80	88	96	104	112	120	127	135	142	150	157	164	172	179
11	24	37	48	59	68	78	87	96	104	113	121	130	138	146	154	162	170	178	186	194
12	25	40	52	63	73	84	93	103	112	121	131	139	148	157	166	174	183	192	200	208
13	27	42	55	67	78	89	100	110	120	130	139	149	158	168	177	186	196	205	214	223
14	29	45	59	71	83	95	106	117	127	138	148	158	168	178	188	198	208	217	227	237
15	31	48	62	76	88	100	112	123	135	146	157	167	178	189	199	209	220	230	240	250
16	32	50	66	80	93	106	118	130	142	154	165	176	188	199	210	220	231	242	253	263
17	34	53	69	83	97	111	124	136	149	161	173	185	197	208	220	231	243	254	265	276
18	35	55	72	87	102	116	129	143	156	168	181	193	206	218	230	242	254	265	277	289
19	37	57	75	91	106	121	135	149	162	175	189	201	214	227	239	252	264	277	289	301
20	38	60	78	94	110	125	140	154	168	182	196	209	223	236	249	262	275	287	300	313
21	40	62	81	98	114	130	145	160	175	189	203	217	231	244	258	271	285	298	311	324
22	41	64	83	101	118	134	150	165	181	195	210	224	239	253	267	281	294	308	322	335
23	42	66	86	104	122	139	155	171	186	202	217	231	246	261	275	290	304	318	332	346
24	44	68	89	108	126	143	159	176	192	208	223	238	254	269	283	298	313	327	342	356
25	45	70	91	111	129	147	164	181	197	213	229	245	261	276	291	306	321	336	351	366
26	46	72	93	113	132	151	168	185	202	219	235	251	267	283	299	314	330	345	360	376
27	47	73	96	116	136	154	172	190	207	224	241	257	274	290	306	322	338	354	369	385
28	48	75	98	119	139	158	176	194	212	229	246	263	280	297	313	329	345	362	378	393
29	49	77	100	121	142	161	180	198	216	234	252	269	286	303	320	336	353	369	386	402
30	50	78	102	124	144	164	183	202	221	239	257	274	292	309	326	343	360	377	393	410
31	51	80	104	126	147	167	187	206	225	243	261	279	297	315	332	349	367	384	400	417
32	52	81	106	128	150	170	190	210	229	247	266	284	302	320	338	355	373	390	407	425
33	53	82	107	130	152	173	193	213	232	251	270	289	307	325	343	361	379	396	414	431
34	54	83	109	132	154	175	196	216	236	255	274	293	312	330	348	366	384	402	420	438
35	54	85	110	134	156	178	199	219	239	259	278	297	316	335	353	372	390	408	426	444
36	55	86	112	136	158	180	201	222	242	262	282	301	320	339	358	376	395	413	431	449
37	56	87	113	137	160	182	204	224	245	265	285	304	324	343	362	381	399	418	436	455
38	56	88	114	139	162	184	206	227	248	268	288	308	327	347	366	385	404	422	441	460
39	57	89	115	140	164	186	208	229	250	270	291	311	330	350	369	388	408	427	445	464
40	57	89	116	141	165	188	210	231	252	273	293	313	333	353	373	392	411	430	449	468

Schwankungsbreite:  $\pm 10 \%$

$\rho = 0.1$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	14
2	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	13	14	15	15
3	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	11	12	13	13	14	15	16	16	17
4	2	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	12	13	14	15	16	16	17	18	19
5	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	14	15	16	17	18	19	19	20
6	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	19	20	21	22
7	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
8	3	5	6	8	9	10	12	13	14	15	16	17	18	20	21	22	23	24	25	26
9	3	5	7	8	10	11	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	25	26	27	28
10	4	6	7	9	11	12	13	15	16	17	19	20	21	23	24	25	26	27	29	30
11	4	6	8	10	11	13	14	16	17	19	20	21	23	24	25	27	28	29	31	32
12	4	6	8	10	12	14	15	17	18	20	21	23	24	26	27	28	30	31	33	34
13	4	7	9	11	13	14	16	18	19	21	22	24	26	27	29	30	31	33	34	36
14	5	7	9	11	13	15	17	19	20	22	24	25	27	29	30	32	33	35	36	38
15	5	8	10	12	14	16	18	20	21	23	25	27	28	30	32	33	35	37	38	40
16	5	8	10	13	15	17	19	21	22	24	26	28	30	31	33	35	37	38	40	42
17	5	8	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	36	38	40	42	43
18	6	9	11	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	43	45
19	6	9	12	14	17	19	21	23	25	27	29	32	34	36	37	39	41	43	45	47
20	6	9	12	15	17	20	22	24	26	28	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49
21	6	10	13	15	18	20	23	25	27	29	32	34	36	38	40	42	44	46	48	51
22	6	10	13	16	18	21	23	26	28	30	33	35	37	39	42	44	46	48	50	52
23	7	10	13	16	19	22	24	27	29	31	34	36	38	41	43	45	47	49	52	54
24	7	11	14	17	19	22	25	27	30	32	35	37	39	42	44	46	49	51	53	55
25	7	11	14	17	20	23	25	28	31	33	36	38	40	43	45	48	50	52	54	57
26	7	11	14	18	21	23	26	29	31	34	36	39	41	44	46	49	51	54	56	58
27	7	11	15	18	21	24	27	29	32	35	37	40	42	45	47	50	52	55	57	60
28	7	12	15	18	21	24	27	30	33	36	38	41	43	46	48	51	54	56	58	61
29	8	12	15	19	22	25	28	31	34	36	39	42	44	47	49	52	55	57	60	62
30	8	12	16	19	22	25	28	31	34	37	40	42	45	48	50	53	56	58	61	63
31	8	12	16	20	23	26	29	32	35	38	40	43	46	49	51	54	57	59	62	65
32	8	13	16	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	52	55	58	60	63	66
33	8	13	17	20	24	27	30	33	36	39	42	45	47	50	53	56	59	61	64	67
34	8	13	17	20	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	59	62	65	68
35	8	13	17	21	24	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	57	60	63	66	69
36	8	13	17	21	24	28	31	34	37	41	44	47	49	52	55	58	61	64	67	69
37	9	13	17	21	25	28	31	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	67	70
38	9	14	18	21	25	28	32	35	38	41	45	48	51	54	57	59	62	65	68	71
39	9	14	18	22	25	29	32	35	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72
40	9	14	18	22	26	29	32	36	39	42	45	48	52	55	58	61	64	67	69	72

Schwankungsbreite:  $\pm 1 \%$

$\rho = 0.2$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	91	142	185	224	262	298	332	366	400	433	465	497	528	560	591	621	652	682	712	742
2	158	247	322	391	456	519	580	639	697	755	811	867	922	976	1030	1084	1137	1190	1243	1295
3	228	356	465	564	658	749	837	922	1006	1089	1170	1251	1330	1409	1487	1564	1641	1717	1793	1868
4	298	465	607	737	860	978	1093	1205	1314	1422	1528	1633	1737	1840	1942	2043	2143	2243	2342	2440
5	367	573	747	907	1059	1204	1345	1483	1618	1751	1882	2011	2139	2265	2391	2515	2639	2761	2883	3004
6	435	679	885	1075	1254	1426	1594	1757	1917	2074	2229	2382	2533	2683	2832	2979	3125	3270	3415	3558
7	502	782	1020	1239	1445	1644	1837	2025	2209	2390	2569	2745	2920	3092	3264	3433	3602	3769	3936	4101
8	567	884	1152	1399	1633	1857	2075	2287	2495	2700	2902	3101	3298	3493	3686	3878	4068	4258	4446	4632
9	630	983	1282	1556	1816	2065	2307	2543	2775	3003	3227	3448	3668	3885	4100	4313	4525	4735	4944	5152
10	692	1079	1408	1709	1994	2268	2534	2794	3048	3298	3545	3788	4029	4267	4503	4737	4970	5201	5431	5659
11	753	1174	1531	1859	2169	2467	2756	3038	3315	3587	3855	4119	4381	4640	4897	5152	5405	5656	5905	6154
12	812	1266	1651	2005	2339	2660	2972	3276	3575	3868	4157	4442	4724	5004	5281	5556	5828	6099	6369	6636
13	869	1356	1768	2147	2505	2849	3183	3508	3828	4142	4451	4757	5059	5358	5655	5949	6241	6531	6820	7106
14	925	1443	1882	2285	2666	3032	3388	3734	4074	4409	4738	5063	5385	5704	6019	6333	6643	6952	7259	7564
15	980	1528	1993	2419	2823	3211	3587	3954	4314	4668	5017	5361	5702	6039	6374	6705	7034	7361	7686	8009
16	1032	1610	2100	2550	2975	3384	3781	4168	4547	4920	5288	5651	6010	6366	6718	7068	7415	7759	8102	8442
17	1084	1691	2205	2677	3124	3553	3969	4375	4774	5165	5551	5933	6310	6683	7053	7420	7784	8146	8505	8863
18	1134	1768	2306	2800	3267	3716	4152	4577	4993	5403	5807	6206	6600	6990	7377	7761	8142	8520	8897	9270
19	1182	1844	2405	2920	3407	3875	4329	4772	5206	5634	6055	6470	6881	7288	7692	8092	8489	8884	9276	9666
20	1229	1917	2500	3035	3542	4028	4500	4961	5413	5857	6294	6727	7154	7577	7996	8412	8825	9236	9643	10049
21	1274	1987	2592	3147	3672	4177	4666	5144	5612	6072	6526	6974	7418	7856	8291	8722	9151	9576	9999	10419
22	1318	2056	2681	3255	3798	4320	4826	5320	5805	6281	6750	7214	7672	8126	8576	9022	9465	9905	10342	10777
23	1360	2121	2767	3359	3920	4458	4981	5491	5991	6482	6967	7445	7918	8386	8851	9311	9768	10222	10673	11122
24	1401	2185	2850	3460	4037	4592	5130	5655	6170	6676	7175	7668	8155	8637	9115	9590	10060	10528	10993	11455
25	1440	2246	2929	3557	4150	4720	5273	5813	6342	6863	7376	7882	8383	8879	9370	9858	10341	10822	11300	11775
26	1478	2305	3006	3650	4258	4843	5411	5965	6508	7042	7568	8088	8602	9111	9615	10115	10612	11105	11595	12082
27	1514	2361	3079	3739	4362	4962	5543	6111	6667	7214	7753	8285	8812	9333	9850	10362	10871	11376	11878	12377
28	1548	2415	3150	3824	4462	5075	5670	6250	6819	7379	7930	8475	9013	9546	10075	10599	11119	11636	12149	12660
29	1581	2466	3217	3906	4557	5183	5791	6383	6965	7536	8099	8655	9205	9750	10289	10825	11356	11884	12408	12930
30	1613	2515	3281	3983	4648	5286	5906	6511	7103	7686	8260	8828	9388	9944	10494	11040	11582	12120	12655	13187
31	1643	2562	3342	4057	4734	5385	6016	6631	7235	7829	8414	8991	9563	10128	10689	11245	11797	12345	12890	13432
32	1671	2606	3400	4127	4816	5478	6120	6746	7360	7964	8559	9147	9728	10304	10874	11440	12001	12559	13113	13664
33	1698	2648	3454	4194	4893	5566	6218	6855	7479	8092	8697	9294	9885	10469	11049	11624	12194	12761	13324	13884
34	1723	2688	3506	4256	4966	5649	6311	6957	7590	8213	8827	9433	10032	10626	11214	11797	12376	12951	13523	14091
35	1747	2725	3554	4315	5035	5727	6398	7053	7695	8326	8949	9563	10171	10772	11369	11960	12547	13130	13710	14286
36	1769	2760	3600	4370	5099	5800	6480	7143	7793	8433	9063	9685	10300	10910	11513	12112	12707	13298	13885	14468
37	1790	2792	3642	4421	5159	5868	6555	7227	7884	8531	9169	9798	10421	11037	11648	12254	12856	13454	14047	14638
38	1809	2822	3681	4469	5214	5931	6626	7304	7969	8623	9267	9904	10533	11156	11773	12386	12994	13598	14198	14795
39	1827	2850	3717	4512	5265	5989	6690	7375	8047	8707	9358	10000	10636	11265	11888	12507	13121	13731	14337	14939
40	1843	2875	3750	4552	5312	6042	6750	7441	8118	8784	9440	10088	10729	11364	11993	12617	13237	13852	14463	15071

Schwankungsbreite:  $\pm 2 \%$

$\rho = 0.2$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	30	47	61	74	86	98	109	120	131	142	153	163	174	184	194	204	214	224	234	244
2	44	69	90	110	128	146	163	179	196	212	227	243	258	274	289	304	319	334	348	363
3	60	94	123	149	174	198	221	244	266	288	310	331	352	373	393	414	434	454	474	494
4	77	120	157	190	222	252	282	311	339	367	394	421	448	475	501	527	553	579	604	630
5	94	146	190	231	270	307	343	378	412	446	480	512	545	577	609	641	672	704	735	766
6	110	172	224	272	317	361	403	445	485	525	564	603	641	679	717	754	791	828	864	901
7	126	197	257	312	364	414	463	510	557	602	647	692	736	779	823	865	908	950	992	1034
8	142	222	290	352	410	467	522	575	627	679	729	780	829	878	927	975	1023	1070	1118	1164
9	158	247	322	390	456	518	579	638	696	753	810	865	920	975	1029	1082	1135	1188	1241	1293
10	173	271	353	428	500	569	635	700	764	827	888	949	1010	1069	1129	1187	1246	1304	1361	1418
11	188	294	383	465	543	618	690	761	830	898	965	1032	1097	1162	1226	1290	1353	1416	1479	1541
12	203	317	413	502	585	666	744	820	895	968	1040	1112	1182	1252	1322	1390	1459	1526	1594	1661
13	217	339	442	537	626	713	796	878	957	1036	1113	1190	1265	1340	1415	1488	1561	1634	1706	1778
14	231	361	471	571	667	758	847	934	1019	1102	1185	1266	1347	1426	1505	1583	1661	1738	1815	1891
15	245	382	498	605	706	803	897	988	1078	1167	1254	1340	1425	1510	1593	1676	1758	1840	1921	2002
16	258	402	525	637	744	846	945	1042	1136	1230	1322	1412	1502	1591	1679	1766	1853	1939	2025	2110
17	271	422	551	669	781	888	992	1093	1193	1291	1387	1482	1577	1670	1762	1854	1945	2035	2125	2215
18	283	442	576	700	816	928	1037	1143	1248	1350	1451	1550	1649	1746	1843	1939	2034	2129	2223	2316
19	295	461	601	729	851	968	1081	1192	1301	1407	1513	1616	1719	1821	1922	2022	2121	2219	2317	2415
20	307	479	624	758	885	1006	1124	1239	1352	1463	1572	1680	1787	1893	1997	2101	2205	2307	2409	2510
21	318	496	647	786	917	1043	1165	1285	1402	1517	1630	1742	1853	1962	2071	2179	2286	2392	2497	2602
22	329	513	670	813	949	1079	1205	1329	1450	1569	1686	1802	1916	2030	2142	2253	2364	2474	2583	2692
23	340	530	691	839	979	1114	1244	1371	1496	1619	1740	1859	1978	2094	2210	2325	2440	2553	2666	2778
24	350	546	712	864	1008	1147	1281	1412	1541	1667	1792	1915	2037	2157	2276	2395	2512	2629	2745	2861
25	360	561	732	888	1036	1179	1317	1452	1584	1714	1842	1968	2093	2217	2340	2462	2583	2703	2822	2941
26	369	576	751	911	1063	1210	1351	1490	1625	1759	1890	2020	2148	2275	2401	2526	2650	2773	2896	3017
27	378	590	769	934	1089	1239	1384	1526	1665	1801	1936	2069	2201	2331	2460	2588	2715	2841	2966	3091
28	387	603	787	955	1114	1267	1416	1561	1703	1843	1980	2116	2251	2384	2516	2647	2777	2906	3034	3161
29	395	616	803	975	1138	1294	1446	1594	1739	1882	2022	2161	2299	2435	2569	2703	2836	2968	3099	3229
30	403	628	819	995	1161	1320	1475	1626	1774	1919	2063	2204	2344	2483	2621	2757	2892	3027	3160	3293
31	410	640	834	1013	1182	1345	1502	1656	1807	1955	2101	2245	2388	2529	2669	2808	2946	3083	3219	3354
32	417	651	849	1031	1203	1368	1528	1685	1838	1989	2137	2284	2429	2573	2715	2857	2997	3136	3274	3412
33	424	661	863	1047	1222	1390	1553	1712	1867	2021	2172	2321	2468	2614	2759	2902	3045	3186	3327	3467
34	430	671	875	1063	1240	1411	1576	1737	1895	2051	2204	2355	2505	2653	2800	2946	3090	3234	3377	3519
35	436	680	888	1078	1257	1430	1598	1761	1921	2079	2235	2388	2540	2690	2839	2986	3133	3279	3423	3567
36	442	689	899	1091	1273	1448	1618	1784	1946	2106	2263	2418	2572	2724	2875	3025	3173	3320	3467	3613
37	447	697	909	1104	1288	1465	1637	1805	1969	2130	2289	2447	2602	2756	2909	3060	3210	3359	3508	3655
38	452	705	919	1116	1302	1481	1654	1824	1990	2153	2314	2473	2630	2786	2940	3093	3245	3395	3545	3694
39	456	712	928	1127	1315	1495	1671	1842	2009	2174	2337	2497	2656	2813	2969	3123	3276	3429	3580	3730
40	460	718	936	1137	1326	1509	1685	1858	2027	2193	2357	2519	2679	2838	2995	3151	3305	3459	3611	3763

Schwankungsbreite:  $\pm 4 \%$

$\rho = 0.2$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	11	18	23	28	33	37	41	46	50	54	58	62	66	70	74	77	81	85	89	93
2	14	22	29	35	41	47	52	58	63	68	73	78	83	88	93	98	103	107	112	117
3	18	28	36	44	51	58	65	71	78	84	90	97	103	109	115	121	127	133	138	144
4	21	33	43	52	61	70	78	86	93	101	109	116	124	131	138	145	152	159	167	174
5	25	39	51	62	72	82	91	101	110	119	128	137	145	154	162	171	179	187	196	204
6	29	45	58	71	83	94	105	116	127	137	147	157	167	177	187	197	206	216	225	235
7	33	51	66	80	94	107	119	131	143	155	167	178	189	201	212	223	234	245	255	266
8	36	57	74	90	105	119	133	147	160	173	186	199	211	224	236	249	261	273	285	297
9	40	63	82	99	115	131	147	162	177	191	205	219	233	247	261	274	288	301	314	328
10	44	68	89	108	126	143	160	177	193	209	224	240	255	270	285	300	314	329	343	358
11	47	74	96	117	137	155	174	191	209	226	243	259	276	292	308	325	340	356	372	388
12	51	79	104	126	147	167	187	206	224	243	261	279	297	314	332	349	366	383	400	417
13	54	85	111	134	157	178	199	220	240	260	279	298	317	336	354	373	391	409	427	445
14	58	90	118	143	167	190	212	234	255	276	296	317	337	357	376	396	416	435	454	473
15	61	95	124	151	176	201	224	247	269	292	313	335	356	377	398	419	439	460	480	500
16	64	100	131	159	186	211	236	260	284	307	330	353	375	397	419	441	463	484	506	527
17	68	105	137	167	195	221	247	273	298	322	346	370	393	417	440	463	485	508	530	553
18	71	110	144	174	204	232	259	285	311	337	362	387	411	436	460	484	507	531	554	578
19	74	115	150	182	212	241	270	297	324	351	377	403	428	454	479	504	529	553	578	602
20	76	119	156	189	220	251	280	309	337	365	392	419	445	472	498	524	549	575	600	625
21	79	124	161	196	228	260	290	320	349	378	406	434	462	489	516	543	569	596	622	648
22	82	128	167	202	236	269	300	331	361	391	420	449	477	505	533	561	589	616	643	670
23	85	132	172	209	244	277	310	341	373	403	433	463	492	522	550	579	607	636	664	692
24	87	136	177	215	251	286	319	352	384	415	446	477	507	537	567	596	626	655	683	712
25	90	140	182	221	258	293	328	361	394	427	459	490	521	552	583	613	643	673	702	732
26	92	143	187	227	265	301	336	371	405	438	470	503	535	566	598	629	660	690	721	751
27	94	147	191	232	271	308	345	380	414	448	482	515	548	580	612	644	676	707	738	769
28	96	150	196	238	277	315	352	388	424	459	493	527	560	593	626	659	691	723	755	787
29	98	153	200	243	283	322	360	397	433	468	503	538	572	606	639	673	706	738	771	803
30	100	156	204	248	289	328	367	405	441	478	513	549	583	618	652	686	720	753	786	819
31	102	159	208	252	294	335	374	412	450	486	523	559	594	629	664	699	733	767	801	835
32	104	162	211	256	299	340	380	419	457	495	532	568	604	640	676	711	746	780	815	849
33	106	165	215	261	304	346	386	426	465	503	540	577	614	650	686	722	758	793	828	863
34	107	167	218	264	309	351	392	432	472	510	548	586	623	660	697	733	769	805	840	875
35	109	169	221	268	313	356	397	438	478	517	556	594	632	669	706	743	780	816	852	888
36	110	171	224	272	317	360	403	444	484	524	563	602	640	678	715	753	789	826	863	899
37	111	173	226	275	321	365	407	449	490	530	570	609	647	686	724	761	799	836	873	909
38	112	175	229	278	324	368	412	454	495	536	576	615	654	693	731	769	807	845	882	919
39	114	177	231	280	327	372	416	458	500	541	581	621	661	700	739	777	815	853	891	928
40	115	179	233	283	330	375	419	462	504	546	586	627	667	706	745	784	822	861	899	936

Schwankungsbreite:  $\pm 10 \%$

$\rho = 0.2$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	3	5	7	8	10	11	12	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	26	27	28
2	4	6	8	9	11	12	14	15	17	18	19	21	22	23	24	26	27	28	29	31
3	4	6	8	10	12	14	15	17	18	20	21	23	24	25	27	28	30	31	32	34
4	5	7	9	11	13	15	17	18	20	22	23	25	26	28	30	31	33	34	36	37
5	5	8	10	12	14	16	18	20	22	24	25	27	29	31	32	34	36	37	39	41
6	5	8	11	13	16	18	20	22	24	26	28	30	32	33	35	37	39	41	42	44
7	6	9	12	15	17	19	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48
8	6	10	13	16	18	21	23	26	28	30	33	35	37	39	41	43	46	48	50	52
9	7	11	14	17	20	22	25	28	30	33	35	37	40	42	44	47	49	51	54	56
10	7	11	15	18	21	24	27	30	32	35	37	40	43	45	48	50	53	55	57	60
11	8	12	16	19	22	26	29	31	34	37	40	43	45	48	51	53	56	59	61	64
12	8	13	17	20	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	62	65	68
13	9	14	18	22	25	29	32	35	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72
14	9	14	19	23	27	30	34	37	41	44	47	51	54	57	60	63	66	69	73	76
15	10	15	20	24	28	32	36	39	43	46	50	53	57	60	63	67	70	73	76	79
16	10	16	21	25	29	33	37	41	45	49	52	56	59	63	66	70	73	77	80	83
17	11	17	22	26	31	35	39	43	47	51	54	58	62	66	69	73	76	80	83	87
18	11	17	23	27	32	36	41	45	49	53	57	61	65	68	72	76	80	83	87	91
19	12	18	23	28	33	38	42	46	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	90	94
20	12	19	24	29	34	39	44	48	53	57	61	65	70	74	78	82	86	90	94	98
21	12	19	25	31	36	41	45	50	54	59	63	68	72	76	80	85	89	93	97	101
22	13	20	26	32	37	42	47	52	56	61	65	70	74	79	83	87	92	96	100	104
23	13	21	27	32	38	43	48	53	58	63	67	72	77	81	86	90	94	99	103	108
24	14	21	28	33	39	44	50	55	60	64	69	74	79	83	88	93	97	102	106	111
25	14	22	28	34	40	46	51	56	61	66	71	76	81	86	90	95	100	104	109	114
26	14	22	29	35	41	47	52	57	63	68	73	78	83	88	93	97	102	107	112	116
27	15	23	30	36	42	48	53	59	64	69	75	80	85	90	95	100	105	110	114	119
28	15	23	30	37	43	49	55	60	66	71	76	82	87	92	97	102	107	112	117	122
29	15	24	31	38	44	50	56	61	67	73	78	83	89	94	99	104	109	114	119	124
30	16	24	32	38	45	51	57	63	68	74	79	85	90	96	101	106	111	117	122	127
31	16	25	32	39	46	52	58	64	70	75	81	86	92	97	103	108	113	119	124	129
32	16	25	33	40	46	53	59	65	71	77	82	88	94	99	105	110	115	121	126	131
33	16	25	33	40	47	53	60	66	72	78	84	89	95	101	106	112	117	123	128	133
34	17	26	34	41	48	54	61	67	73	79	85	91	96	102	108	113	119	124	130	135
35	17	26	34	41	48	55	61	68	74	80	86	92	98	103	109	115	121	126	132	137
36	17	27	35	42	49	56	62	69	75	81	87	93	99	105	111	116	122	128	133	139
37	17	27	35	42	50	56	63	69	76	82	88	94	100	106	112	118	123	129	135	141
38	17	27	35	43	50	57	64	70	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131	136	142
39	18	27	36	43	51	58	64	71	77	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	143
40	18	28	36	44	51	58	65	71	78	84	91	97	103	109	115	121	127	133	139	145

Schwankungsbreite:  $\pm 1 \%$  $\rho = 0.3$ 

## Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	136	212	277	336	392	446	499	550	600	649	697	745	793	840	886	932	978	1023	1068	1113
2	238	370	483	587	685	779	870	959	1046	1132	1217	1300	1383	1465	1546	1626	1706	1785	1864	1942
3	343	535	697	847	988	1123	1255	1384	1510	1633	1755	1876	1995	2113	2230	2346	2461	2576	2689	2802
4	448	698	911	1106	1290	1467	1639	1807	1972	2133	2293	2450	2606	2760	2913	3064	3215	3364	3513	3660
5	551	860	1121	1361	1588	1806	2018	2225	2427	2626	2823	3017	3208	3398	3586	3773	3958	4142	4325	4506
6	653	1018	1328	1612	1881	2140	2390	2635	2875	3111	3343	3573	3800	4025	4247	4468	4688	4906	5122	5337
7	752	1173	1531	1858	2168	2466	2755	3037	3314	3585	3853	4118	4380	4639	4895	5150	5403	5654	5904	6152
8	850	1325	1729	2099	2449	2785	3112	3430	3743	4050	4352	4651	4947	5239	5529	5817	6103	6386	6668	6949
9	945	1474	1923	2334	2723	3098	3461	3815	4162	4504	4840	5173	5501	5827	6149	6469	6787	7102	7416	7727
10	1038	1619	2112	2564	2992	3403	3801	4191	4572	4947	5317	5682	6043	6400	6755	7106	7455	7801	8146	8488
11	1129	1761	2296	2788	3253	3700	4134	4557	4972	5380	5782	6179	6571	6960	7345	7728	8107	8484	8858	9230
12	1217	1899	2477	3007	3508	3990	4458	4914	5362	5802	6235	6663	7087	7506	7921	8334	8743	9149	9553	9954
13	1304	2033	2652	3220	3757	4273	4774	5263	5742	6213	6677	7135	7589	8038	8483	8924	9362	9797	10230	10660
14	1388	2164	2823	3427	3999	4548	5081	5602	6112	6613	7107	7595	8078	8555	9029	9499	9965	10428	10889	11346
15	1469	2292	2989	3629	4234	4816	5381	5931	6471	7002	7526	8042	8553	9059	9561	10058	10552	11042	11530	12014
16	1549	2416	3151	3825	4463	5076	5671	6252	6821	7381	7932	8477	9015	9549	10077	10602	11122	11639	12153	12663
17	1626	2536	3307	4016	4685	5329	5954	6563	7161	7748	8327	8899	9464	10024	10579	11129	11676	12218	12758	13294
18	1701	2652	3460	4200	4901	5574	6228	6865	7490	8105	8710	9308	9900	10485	11066	11642	12213	12781	13345	13906
19	1773	2766	3607	4379	5110	5812	6493	7158	7810	8450	9082	9705	10322	10933	11538	12138	12734	13326	13914	14499
20	1843	2875	3750	4553	5312	6042	6750	7441	8119	8785	9441	10090	10731	11366	11995	12619	13238	13853	14465	15073
21	1911	2981	3888	4721	5508	6265	6999	7716	8418	9109	9789	10462	11126	11784	12437	13084	13726	14364	14998	15628
22	1977	3083	4022	4883	5697	6480	7239	7981	8707	9421	10126	10821	11508	12189	12864	13533	14197	14857	15513	16165
23	2040	3182	4151	5039	5880	6688	7471	8236	8986	9723	10450	11167	11877	12580	13276	13967	14652	15333	16010	16683
24	2101	3277	4275	5190	6056	6888	7695	8483	9255	10014	10763	11501	12232	12956	13673	14384	15090	15792	16489	17182
25	2160	3369	4394	5335	6225	7080	7910	8720	9514	10294	11063	11823	12574	13318	14055	14786	15512	16233	16950	17662
26	2216	3457	4509	5474	6388	7265	8117	8948	9762	10563	11352	12132	12903	13666	14422	15173	15917	16657	17393	18123
27	2271	3541	4619	5608	6544	7443	8315	9166	10000	10821	11630	12428	13218	14000	14775	15543	16306	17064	17817	18566
28	2322	3622	4725	5736	6693	7613	8505	9375	10229	11068	11895	12712	13519	14319	15112	15898	16678	17454	18224	18990
29	2372	3700	4825	5858	6836	7775	8686	9575	10447	11304	12149	12983	13808	14625	15434	16237	17034	17826	18613	19395
30	2419	3773	4921	5975	6972	7930	8859	9766	10655	11529	12391	13241	14083	14916	15741	16560	17373	18181	18983	19781
31	2464	3843	5013	6086	7101	8077	9023	9947	10853	11743	12621	13487	14344	15193	16034	16868	17696	18518	19336	20148
32	2507	3910	5099	6191	7224	8217	9179	10119	11040	11946	12839	13720	14592	15455	16311	17159	18002	18839	19670	20497
33	2547	3973	5181	6291	7340	8349	9327	10282	11218	12138	13045	13941	14827	15704	16573	17435	18291	19141	19986	20826
34	2585	4032	5259	6385	7450	8473	9466	10435	11385	12319	13240	14149	15048	15938	16821	17696	18564	19427	20285	21137
35	2621	4088	5331	6473	7553	8590	9597	10580	11543	12490	13423	14345	15256	16158	17053	17940	18821	19695	20565	21429
36	2654	4140	5399	6555	7649	8700	9719	10714	11690	12649	13594	14527	15450	16364	17270	18169	19061	19947	20827	21702
37	2685	4188	5463	6632	7739	8802	9833	10840	11827	12797	13753	14698	15632	16556	17473	18382	19284	20180	21071	21957
38	2714	4233	5521	6703	7822	8896	9939	10956	11954	12934	13901	14855	15799	16734	17660	18579	19491	20397	21297	22192
39	2741	4274	5575	6769	7898	8983	10036	11063	12070	13061	14037	15000	15953	16897	17832	18760	19681	20596	21505	22409
40	2765	4312	5624	6828	7968	9062	10124	11161	12177	13176	14160	15133	16094	17046	17990	18926	19855	20778	21695	22606

Schwankungsbreite:  $\pm 2 \%$

$\rho = 0.3$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	45	70	91	111	129	147	164	181	197	213	229	245	260	276	291	306	321	336	351	366
2	67	104	135	165	192	218	244	269	293	317	341	365	388	411	433	456	478	501	523	545
3	91	141	184	224	261	297	332	366	399	432	464	496	528	559	590	621	651	681	712	741
4	116	180	235	285	333	379	423	466	509	550	592	632	672	712	752	791	829	868	906	944
5	140	219	286	347	405	460	514	567	619	669	719	769	818	866	914	961	1009	1055	1102	1148
6	165	258	336	408	476	542	605	667	728	787	846	904	962	1019	1075	1131	1186	1242	1296	1351
7	190	296	386	468	546	622	694	765	835	904	971	1038	1104	1169	1234	1298	1362	1425	1488	1551
8	214	333	435	528	616	700	782	862	941	1018	1094	1169	1244	1317	1390	1462	1534	1605	1676	1747
9	237	370	482	586	683	777	868	957	1044	1130	1215	1298	1381	1462	1543	1623	1703	1782	1861	1939
10	260	406	529	643	750	853	953	1050	1146	1240	1333	1424	1515	1604	1693	1781	1868	1955	2042	2127
11	283	441	575	698	815	927	1035	1141	1245	1347	1448	1547	1646	1743	1839	1935	2030	2124	2218	2311
12	305	475	620	752	878	999	1116	1230	1342	1452	1560	1668	1773	1878	1982	2086	2188	2290	2391	2491
13	326	509	663	805	940	1069	1194	1316	1436	1554	1670	1785	1898	2011	2122	2232	2342	2451	2559	2666
14	347	541	706	857	1000	1137	1271	1401	1528	1654	1777	1899	2020	2139	2258	2375	2492	2608	2723	2837
15	367	573	747	907	1058	1204	1345	1483	1618	1750	1881	2010	2138	2265	2390	2514	2638	2760	2882	3003
16	387	604	787	956	1115	1269	1417	1562	1705	1845	1982	2119	2253	2386	2519	2650	2780	2909	3037	3165
17	406	634	826	1003	1171	1332	1488	1640	1789	1936	2081	2224	2365	2505	2643	2781	2918	3053	3188	3322
18	425	663	864	1049	1224	1393	1556	1715	1871	2025	2176	2326	2473	2620	2765	2909	3051	3193	3334	3474
19	443	691	901	1094	1277	1452	1622	1788	1951	2111	2269	2425	2579	2731	2882	3032	3181	3329	3476	3622
20	460	718	937	1137	1327	1509	1686	1859	2028	2194	2358	2520	2681	2839	2996	3152	3307	3461	3613	3765
21	477	745	971	1179	1376	1565	1748	1927	2103	2275	2445	2613	2779	2943	3106	3268	3428	3588	3746	3904
22	494	770	1004	1220	1423	1618	1808	1993	2175	2353	2529	2703	2874	3044	3213	3380	3546	3711	3875	4037
23	510	795	1037	1259	1468	1670	1866	2057	2244	2428	2610	2789	2966	3142	3316	3488	3659	3829	3998	4167
24	525	819	1068	1296	1512	1720	1922	2118	2311	2501	2688	2872	3055	3236	3415	3592	3769	3944	4118	4291
25	539	841	1097	1332	1555	1768	1975	2178	2376	2571	2763	2953	3140	3326	3510	3693	3874	4054	4233	4411
26	554	863	1126	1367	1595	1814	2027	2234	2438	2638	2835	3030	3222	3413	3602	3789	3975	4160	4343	4526
27	567	884	1153	1400	1634	1859	2076	2289	2497	2702	2904	3104	3301	3496	3690	3881	4072	4261	4449	4636
28	580	905	1180	1432	1671	1901	2124	2341	2554	2764	2970	3174	3376	3576	3774	3970	4165	4358	4551	4742
29	592	924	1205	1463	1707	1941	2169	2391	2609	2823	3034	3242	3448	3652	3854	4055	4254	4451	4648	4843
30	604	942	1229	1492	1741	1980	2212	2439	2661	2879	3094	3306	3517	3725	3931	4135	4338	4540	4740	4940
31	615	960	1252	1520	1773	2017	2253	2484	2710	2932	3151	3368	3582	3794	4004	4212	4419	4624	4828	5031
32	626	976	1273	1546	1804	2052	2292	2527	2757	2983	3206	3426	3644	3859	4073	4285	4495	4704	4912	5118
33	636	992	1294	1571	1833	2085	2329	2567	2801	3031	3257	3481	3702	3921	4138	4354	4567	4780	4991	5200
34	645	1007	1313	1594	1860	2116	2364	2606	2843	3076	3306	3533	3758	3980	4200	4419	4636	4851	5065	5278
35	654	1021	1331	1616	1886	2145	2396	2642	2882	3119	3352	3582	3809	4035	4258	4480	4700	4918	5135	5351
36	663	1034	1348	1637	1910	2172	2427	2675	2919	3158	3394	3628	3858	4086	4312	4537	4759	4981	5201	5419
37	671	1046	1364	1656	1932	2198	2455	2707	2953	3195	3434	3670	3903	4134	4363	4590	4815	5039	5261	5483
38	678	1057	1379	1674	1953	2221	2482	2736	2985	3230	3471	3709	3945	4178	4410	4639	4867	5093	5318	5541
39	684	1067	1392	1690	1972	2243	2506	2762	3014	3261	3505	3746	3984	4219	4453	4684	4914	5143	5370	5595
40	690	1077	1404	1705	1990	2263	2528	2787	3041	3290	3536	3779	4019	4256	4492	4726	4958	5188	5417	5645

Schwankungsbreite:  $\pm 4 \%$

$\rho = 0.3$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	17	26	35	42	49	56	62	69	75	81	87	93	99	105	110	116	122	128	133	139
2	21	33	44	53	62	70	78	87	94	102	110	117	125	132	139	147	154	161	168	175
3	26	41	54	65	76	87	97	107	116	126	135	145	154	163	172	181	190	199	208	216
4	32	50	65	79	92	104	117	128	140	152	163	174	185	196	207	218	229	239	250	260
5	37	58	76	92	108	123	137	151	165	178	192	205	218	231	243	256	269	281	294	306
6	43	67	88	106	124	141	158	174	190	205	221	236	251	266	280	295	310	324	338	352
7	49	76	99	121	141	160	179	197	215	233	250	267	284	301	318	334	351	367	383	399
8	54	85	111	135	157	179	200	220	240	260	279	298	317	336	355	373	391	410	428	446
9	60	94	122	148	173	197	220	243	265	286	308	329	350	371	391	412	432	452	472	492
10	66	102	134	162	189	215	240	265	289	313	336	359	382	405	427	449	472	493	515	537
11	71	111	145	176	205	233	260	287	313	339	364	389	414	438	463	487	511	534	558	581
12	76	119	156	189	220	251	280	309	337	364	392	418	445	471	497	523	549	575	600	625
13	82	127	166	202	235	268	299	330	360	389	418	447	475	504	531	559	587	614	641	668
14	87	135	177	214	250	284	318	350	382	414	445	475	505	535	565	594	623	652	681	710
15	92	143	187	227	264	301	336	370	404	437	470	502	534	566	597	628	659	690	720	750
16	97	151	197	239	278	317	354	390	426	461	495	529	563	596	629	661	694	726	758	790
17	101	158	206	250	292	332	371	409	446	483	519	555	590	625	660	694	728	762	795	829
18	106	165	216	262	305	347	388	428	467	505	543	580	617	653	689	725	761	796	831	866
19	110	172	225	273	318	362	404	446	486	526	566	604	643	681	718	756	793	830	866	903
20	115	179	233	283	331	376	420	463	505	547	588	628	668	707	747	785	824	862	900	938
21	119	185	242	294	343	390	435	480	524	567	609	651	692	733	774	814	854	894	933	972
22	123	192	250	304	354	403	450	496	542	586	630	673	716	758	800	842	883	924	965	1005
23	127	198	258	313	366	416	465	512	559	605	650	694	739	782	826	869	911	954	996	1037
24	131	204	266	323	377	428	478	527	575	623	669	715	761	806	850	894	938	982	1025	1068
25	134	209	273	332	387	440	492	542	591	640	688	735	782	828	874	919	964	1009	1054	1098
26	138	215	280	340	397	452	505	556	607	657	706	754	802	849	896	943	989	1035	1081	1127
27	141	220	287	349	407	463	517	570	622	673	723	772	822	870	918	966	1013	1061	1107	1154
28	144	225	294	356	416	473	529	583	636	688	739	790	840	890	939	988	1036	1085	1133	1180
29	147	230	300	364	425	483	540	595	649	702	755	807	858	909	959	1009	1059	1108	1157	1205
30	150	234	306	371	433	493	550	607	662	716	770	823	875	927	978	1029	1080	1130	1180	1229
31	153	239	311	378	441	502	561	618	674	730	784	838	891	944	996	1048	1100	1151	1201	1252
32	156	243	317	385	449	511	570	629	686	742	798	852	907	960	1013	1066	1119	1170	1222	1274
33	158	247	322	391	456	519	580	639	697	754	811	866	921	976	1030	1083	1136	1189	1242	1294
34	161	250	327	397	463	526	588	648	707	765	823	879	935	990	1045	1099	1153	1207	1260	1313
35	163	254	331	402	469	534	596	657	717	776	834	891	948	1004	1059	1115	1169	1224	1278	1331
36	165	257	335	407	475	541	604	666	726	786	845	903	960	1017	1073	1129	1184	1239	1294	1348
37	167	260	339	412	481	547	611	673	735	795	854	913	971	1029	1086	1142	1198	1254	1309	1364
38	169	263	343	416	486	553	617	681	743	804	864	923	982	1040	1097	1154	1211	1267	1323	1379
39	170	266	346	421	491	558	623	687	750	811	872	932	991	1050	1108	1165	1223	1280	1336	1392
40	172	268	349	424	495	563	629	693	756	819	880	940	1000	1059	1118	1176	1233	1291	1348	1404

Schwankungsbreite:  $\pm 10 \%$

$\rho = 0.3$

Anzahl der Fraktionen

HG%	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	5	8	10	13	15	17	19	21	22	24	26	28	30	31	33	35	37	38	40	42
2	6	9	11	14	16	18	21	23	25	27	29	31	33	35	37	38	40	42	44	46
3	6	10	13	15	18	20	23	25	27	30	32	34	36	38	40	42	44	47	49	51
4	7	11	14	17	20	22	25	27	30	32	35	37	40	42	44	47	49	51	53	56
5	7	12	15	18	21	24	27	30	33	35	38	41	43	46	48	51	53	56	58	61
6	8	13	17	20	23	27	30	33	36	39	42	44	47	50	53	56	58	61	64	66
7	9	14	18	22	25	29	32	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72
8	10	15	19	24	27	31	35	38	42	45	49	52	55	59	62	65	68	72	75	78
9	10	16	21	25	30	34	38	41	45	49	52	56	60	63	67	70	74	77	80	84
10	11	17	22	27	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	71	75	79	82	86	90
11	12	18	24	29	34	38	43	47	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96
12	12	19	25	31	36	41	46	50	55	59	64	68	72	77	81	85	89	93	98	102
13	13	21	27	32	38	43	48	53	58	63	67	72	77	81	86	90	94	99	103	108
14	14	22	28	34	40	45	51	56	61	66	71	76	81	86	90	95	100	104	109	113
15	15	23	30	36	42	48	53	59	64	69	75	80	85	90	95	100	105	110	114	119
16	15	24	31	38	44	50	56	62	67	73	78	84	89	94	99	105	110	115	120	125
17	16	25	32	39	46	52	58	64	70	76	82	87	93	98	104	109	115	120	125	130
18	17	26	34	41	48	54	61	67	73	79	85	91	97	102	108	114	119	125	130	136
19	17	27	35	43	50	57	63	70	76	82	88	95	101	107	112	118	124	130	136	141
20	18	28	36	44	52	59	66	72	79	85	92	98	104	110	117	123	129	135	141	146
21	19	29	38	46	53	61	68	75	82	88	95	101	108	114	121	127	133	139	145	152
22	19	30	39	47	55	63	70	77	84	91	98	105	111	118	125	131	137	144	150	156
23	20	31	40	49	57	65	72	80	87	94	101	108	115	122	128	135	142	148	155	161
24	20	32	41	50	58	66	74	82	89	97	104	111	118	125	132	139	146	152	159	166
25	21	32	42	51	60	68	76	84	92	99	107	114	121	128	136	143	150	157	163	170
26	21	33	43	53	62	70	78	86	94	102	109	117	124	132	139	146	153	161	168	175
27	22	34	44	54	63	72	80	88	96	104	112	120	127	135	142	150	157	164	172	179
28	22	35	45	55	64	73	82	90	98	107	114	122	130	138	145	153	161	168	175	183
29	23	36	46	56	66	75	84	92	101	109	117	125	133	141	148	156	164	172	179	187
30	23	36	47	57	67	76	85	94	102	111	119	127	135	143	151	159	167	175	183	190
31	24	37	48	59	68	78	87	96	104	113	121	130	138	146	154	162	170	178	186	194
32	24	38	49	60	69	79	88	97	106	115	123	132	140	149	157	165	173	181	189	197
33	24	38	50	60	71	80	90	99	108	117	125	134	142	151	159	168	176	184	192	200
34	25	39	51	61	72	81	91	100	109	118	127	136	145	153	162	170	178	187	195	203
35	25	39	51	62	73	83	92	102	111	120	129	138	147	155	164	172	181	189	198	206
36	25	40	52	63	73	84	93	103	112	122	131	140	148	157	166	175	183	192	200	208
37	26	40	52	64	74	85	94	104	114	123	132	141	150	159	168	177	185	194	202	211
38	26	41	53	64	75	85	95	105	115	124	134	143	152	161	170	178	187	196	205	213
39	26	41	54	65	76	86	96	106	116	125	135	144	153	162	171	180	189	198	207	215
40	27	41	54	66	77	87	97	107	117	127	136	145	155	164	173	182	191	200	208	217

## Abschnitt III

# Mathematische Methoden

Die Vorstellung der statistischen und Mathematischen Methoden richtet sich an die StatistikerInnen, die die Datenanalysen durchführen. Dabei wird die in der statistischen Literatur verwendete Notation verwendet (siehe [2],[3] oder [5]). Alle Verfahren sind auch in der statistischen Literatur detailliert beschrieben. Diese Anleitung dient auch zur Vereinheitlichung und Vergleichbarkeit der Bundesländerergebnisse.

### III.1 Anteilschätzung und Modellierung

Die Analyse Massen von  $K$  Fraktionen (einschließlich der Rest-Fraktion) bilden den Datensatz. Die Anzahl der Proben bezeichne  $N$ , ist für die statistische Analyse aber nicht wirksam, da alles auf Mengen-Basis berechnet wird.

$X_{ki}$   $k = 1, \dots, K, i = 1, \dots, N$  Masse der  $k$ ten Fraktion bei Probe  $i$

$X_{k\cdot} := \sum_{i=1}^N X_{ki}$  Gesamt-Masse der  $k$ -ten Fraktion

$X_{\cdot i} := \sum_{k=1}^K X_{ki}$  Masse der  $i$ -ten Probe

$X_{\cdot\cdot} := \sum_{k=1}^K X_{k\cdot}$  Gesamt-Analyse Masse

Die Anteile entsprechen den Parametern einer Multinomial-Verteilung. Dafür ist die Umrechnung (zumindest für manche Auswertungen) der Masse in Anzahl von Einheiten nötig.

Als **Massenäquivalent** wird  $\rho$  aus der Stückgewichtsanalyse verwendet. Eine Einheit entspricht daher  $\rho$  kg. Die Anzahl der Einheiten bezeichnet

$Y_{ki} := \frac{X_{ki}}{\rho}$  für die  $k$ te Fraktion bei Probe  $i$ ,

entsprechen ist  $Y_{k\cdot} = \sum_{i=1}^N Y_{ki}$ , und  $Y_{\cdot i} = \sum_{k=1}^K Y_{ki}$  und die Anzahl der Einheiten der gesamten Analyse bezeichne

$$A := Y_{\cdot\cdot} := \sum_{k=1}^K Y_{k\cdot}$$

Der Vektor der Einheiten  $Y_K := (Y_{1\bullet}, \dots, Y_{K\bullet})^\top$  der einzelnen Fraktionen folgt einer **Multinomial-Verteilung**  $MN_{A;\theta_1, \dots, \theta_K}$  mit den Parametern  $\theta_1, \dots, \theta_K$ , den Fraktionsanteilen. Es erweist sich als zweckmäßig, die Größen  $Y_{K\bullet}$  und  $\theta_K$ , obwohl redundant, explizit in die Wahrscheinlichkeitsfunktion mit aufzunehmen.  $Y$  definiere nun eine  $K - 1$  dimensionale Zufallsgröße und der Parametervektor sei  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{K-1})^\top$ .

Die Anteilsschätzung für Fraktion  $k$  erfolgt durch

$$\hat{\theta}_k := \frac{Y_{k\bullet}}{A} = \frac{X_{k\bullet}}{X_{\bullet\bullet}}$$

und hängt nicht vom Massenäquivalent ab.

### III.2 Konfidenzbereiche und Varianzen

Für die Bestimmung der Konfidenzbereiche ist die Kovarianzstruktur der Anteilsschätzung erforderlich. Die Kovarianzmatrix von  $Y := (Y_{1\bullet}, \dots, Y_{K-1\bullet})^\top$  ist

$$\Sigma = A(\text{diag}(\theta) - \theta\theta^\top),$$

mit der Diagonalmatrix  $\text{diag}(\theta)$ , wobei der Vektor  $\theta$  in die Diagonale eingetragen wird. Für die gemeinsame Schätzung der Anteile ist die Kovarianzmatrix

$$\text{COV}(\hat{\theta}) = \frac{1}{A}(\text{diag}(\hat{\theta}) - \hat{\theta}\hat{\theta}^\top)$$

Daraus lassen sich die Zusammenhänge der Fraktionen ableiten und damit auch eine getroffene Auswahl der Fraktionen bewerten.

Die Korrelation zwischen der Anteilsschätzung der Fraktion  $k_1$  und Fraktion  $k_2$  ist

$$\text{cor}(\hat{\theta}_{k_1}, \hat{\theta}_{k_2}) = -\frac{\hat{\theta}_{k_1}\hat{\theta}_{k_2}}{\sqrt{\hat{\theta}_{k_1}(1-\hat{\theta}_{k_1})}\sqrt{\hat{\theta}_{k_2}(1-\hat{\theta}_{k_2})}},$$

und die Varianz der Anteilsschätzung der Fraktion  $k$  ist

$$\text{Var}(\hat{\theta}_k) = \frac{1}{A}\hat{\theta}_k(1-\hat{\theta}_k).$$

Man kann hier Tests auf Unkorreliertheit anwenden, um zu erkennen, dass die Unterschiede in den Fraktionen zu gering sind. Die Fraktionsanteile können sehr stark korreliert sein, und es empfiehlt sich, diese Fraktionen zusammenzufassen und nicht getrennt zu analysieren.

Der gemeinsame Konfidenzbereich (nach Normalverteilungsapproximation) ist für  $\theta$  ein  $k - 1$ -dimensionales Ellipsoid,

$$\{\theta \mid (\hat{\theta} - \theta)^\top \Sigma^{-1}(\hat{\theta} - \theta) \leq \chi^2(K - 1, 1 - \alpha)\}$$

wobei  $\chi^2(K - 1, 1 - \alpha)$  das  $1 - \alpha$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $K - 1$  Freiheitsgraden bezeichnet. Dieser Bereich kann aber für  $K > 2$  nur numerisch bestimmt werden und auch nicht graphisch dargestellt werden. Es wird daher dieser Bereich durch einzelne Konfidenzintervalle ersetzt, die zwar insgesamt mehr Volumen haben, aber einfacher interpretiert werden können. Das  $1 - \alpha$  Konfidenzintervall des Anteils  $\hat{\theta}_k$  ist  $[u, o]$  mit unterer Grenze

$$u = \frac{\chi_q^2 + 2X_{k\bullet} - \sqrt{\chi_q^2(\chi_q^2 + 4\hat{\theta}_k(1-\hat{\theta}_k))A}}{2(A + \chi_q^2)}$$

wobei das Quantil  $\chi_q^2 := \chi^2(K-1, 1-\alpha)$  ist. Die obere Grenze ist

$$o = \frac{\chi_q^2 + 2X_{k\bullet} + \sqrt{\chi_q^2(\chi_q^2 + 4\hat{\theta}_k(1-\hat{\theta}_k))A}}{2(A + \chi_q^2)}.$$

Für  $K = 2$  Fraktionen führt das auf den Spezialfall der Binomial-Verteilung.

### III.3 Mengenbestimmung unter Genauigkeitsvorgaben

Für eine vorgegebene Überdeckungswahrscheinlichkeit  $1-\alpha$  und eine gewählte Fraktionenauswahl mit  $K$  Fraktionen liefert die Formel für das Konfidenzintervall eine Möglichkeit, die benötigte Analysemenge (Mindestmenge) für das Erreichen einer maximalen Schwankungsbreite  $\pm B$  zu berechnen. Die Schwankungsbreite  $B$  ist die halbe Länge des Konfidenzintervalls mit

$$B = \frac{\sqrt{\chi_q^2(\chi_q^2 + 4\hat{\theta}_k(1-\hat{\theta}_k))A}}{2(A + \chi_q^2)}$$

nach Vorliegen der Analyse und der Schätzwerte. Um die Mindestmenge  $M$  zu bestimmen wird ein Erwartungswert  $a$  für den Anteil der größten Fraktion ( $\leq 50\%$ ) unter den  $K$  Fraktionen ermittelt. Dieser Wert kann aus Voruntersuchungen kommen oder einer Expertenabschätzung sein. Die größte Fraktion kann auch die Restfraktion sein. Die Mindestmenge  $M$  wird als Lösung der Gleichung

$$B = \frac{\sqrt{\rho} \sqrt{\chi_q^2(\chi_q^2 + 4a(1-a))M}}{2(M + \rho\chi_q^2)} \quad (\text{III.1})$$

bestimmt. Die im zweiten Abschnitt tabellierten Mindestmengen sind aus dieser Gleichung berechnet.

### III.4 Methodische Bestimmung des Stückgewichts

Die Approximation der Multinomialverteilung durch eine multivariate Normalverteilung verlangt eine Umrechnungszahl der Menge, das ist prinzipiell nur eine Rechenkonstante. Diese Umrechnungszahl muss aber in der praktischen Umsetzung erklärt werden. Diese Zahl fasst die eindeutig einer Fraktion zuordenbare Masse im Durchschnitt zusammen.

Die Anzahl der Fraktionen sei  $m$  und  $\bar{G}_i$  bezeichne das Durchschnittsgewicht einer Einheit der Fraktion  $i$ . Die Stückzahlen zu den Fraktionen seien  $K_1, \dots, K_m$  und  $K = \sum_i K_i$  bezeichne die Gesamtstückzahl.

Der gemeinsame Schätzwert für die Einheitsmasse ist daher

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{G}_i K_i}{\sum_{i=1}^m K_i}.$$

Ein höherer Wert erhöht auch die notwendige Masse der Sortieranalyse für eine vorgegebene Genauigkeit. Die Varianz der Schätzung  $\hat{\rho}$  ist

$$\text{Var}(\hat{\rho}) = \frac{\sum_{i=1}^m \text{Var}(\bar{G}_i) K_i^2}{(\sum_{i=1}^m K_i)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^m K_i},$$

wobei  $\sigma^2$  die Varianz eines einzelnen Stückgewichts bezeichnet. Da nur Stückgewichte über dem Schwellenwert  $u$  einbezogen werden, liegt auch  $\hat{\rho} > u$  über dem Schwellenwert.

Ein Konfidenzintervall zum Niveau  $\alpha$  für  $\hat{\rho}$  ist

$$\hat{\rho} \pm \frac{t(m-1, 1-\alpha/2)}{\sqrt{K}} S_G ,$$

dabei ist  $t(m-1, 1-\alpha/2)$  das  $t$ -Quantile und

$$S_G^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m K_i (\bar{G}_i - \hat{\rho})^2 .$$

Die Basis für die Berechnung der erforderlichen Probenstückzahl  $K$  (oder der Probenmasse) liefert dieses Konfidenzintervall. Wenn die maximale Abweichung  $\pm L$  ist und für die Varianz  $S_G \leq M$  eine Schranke  $M$  vorgegeben wird, erhält man aus

$$L = \frac{t(m-1, 1-\theta/2)}{\sqrt{K}} S_G \leq \frac{t(m-1, 1-\theta/2)}{\sqrt{K}} M$$

die erforderliche Probenstückzahl

$$K \leq t(m-1, 1-\alpha/2)^2 \cdot \frac{M^2}{L^2} .$$

Die Schranke  $M$  kann aus vorangegangenen Analysen als Resultat der Varianzschätzung  $S_G$  gefunden werden. Nach dem Vorliegen eines Schätzwertes  $\hat{\rho}$  kann  $K$  in eine erforderliche Probenmasse  $PM$

$$PM = t(m-1, 1-\alpha/2)^2 \cdot \frac{M^2}{L^2} \cdot \hat{\rho}$$

umgerechnet werden.

### III.5 Test auf Unterschiede

Mit dem Mengen basierten Datensatz besteht eine (relativ einfache) Methode für einen statistischen Test auf Unterschiede in verschiedenen Analysen. Dafür werden zwei oder mehr Analysenergebnisse mit identischer Fraktionenauswahl herangezogen. Diese Methode gibt der **Kontingenztafel-Test** vor.

Die Datengrundlage bildet die Mengentabelle in den einzelnen Fraktionen und Analysen (Kontingenztafel):

Analyse \ Fraktion	Fraktion 1	Fraktion 2	...	Fraktion $K$	Zeilensumme
Analyse 1	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1K}$	$X_{1\cdot}$
$\vdots$	...	...	...	...	$\vdots$
Analyse $L$	$X_{L1}$	$X_{L2}$	...	$X_{LK}$	$X_{L\cdot}$
Spaltensumme	$X_{\cdot 1}$	$X_{\cdot 2}$	...	$X_{\cdot l}$	$X_{\cdot\cdot}$

Die Fraktionsmenge der  $l$ -ten Analyse für Fraktion  $k$  ist  $X_{ik}$ . Mit

$$X_{l\cdot} = \sum_{k=1}^K X_{lk}$$

und

$$X_{\cdot k} = \sum_{l=1}^L X_{lk}$$

sind die Randhäufigkeiten. Die Hypothese, dass die Anteile unabhängig von der Analyse sind, wird durch die Abweichung von der Unabhängigkeitsannahme geprüft.

Die Teststatistik ist die Summe der quadratischen relativen Differenzen, das ist

$$\hat{\chi}^2 := X_{\cdot\cdot} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \frac{(X_{lk} - X_{l\cdot} X_{\cdot k} / X_{\cdot\cdot})^2}{X_{l\cdot} X_{\cdot k}}$$

Diese Größe  $\hat{\chi}^2$  ist asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $(K - 1)(L - 1)$  Freiheitsgraden, wenn die Unabhängigkeitshypothese zutrifft.

Man wird die Annahme identischer Anteile verwerfen, wenn  $\hat{\chi}^2$  "zu groß" wird, genauer wenn

$$\hat{\chi}^2 > \chi^2((K - 1)(L - 1), 1 - \alpha).$$

Wenn diese Ungleichung erfüllt ist, bestehen signifikante Unterschiede für die Fraktionsanteile bei den Analysen.

Es existieren andere Tests auf Unterschiede (etwa auf Basis der Mahalanobis-Distanz, Hotteling T etc.), die eventuell geringfügig bessere Operationscharakteristik besitzen. Trotzdem wird hier der Kontingenztafel-Test empfohlen, da er unabhängig vom Massenäquivalent ist und auch nicht von Normalverteilungsannahmen für die Mengen abhängig ist. Dieser Test ist robuster und zudem auch wesentlich einfacher durchzuführen. Dieser Test zählt zu den Verteilungsfreien Verfahren.

### III.6 Probenplanung und Schichtungen

Die Probenplanung erfolgt ausschließlich über die Festlegung der Probenmasse, sodass ein **ausgewogener** Versuchsplan (Design) entsteht. Zuerst wird für die Grundgesamtheit (Bundesland) eine erforderliche Schwankungsbreite  $B$  und die Fraktionenanzahl  $K$  festgelegt. Mit einem Erwartungswert für die größte Fraktion lässt sich dann mit den Tabellen aus Abschnitt II oder der Formel (III.1) eine Probenmenge  $G$  bestimmen.

Die Schichtung (beispielsweise räumliche Schichtung) der Grundgesamtheit wird durch die Aufteilung nach den aktuellsten Sammelmengen durchgeführt. Die Prozentanteile  $p_i$  einer Schicht  $S_i$  der Sammelmenge führt auf die Zuteilung von  $p_i G$ . Bei einer Schichtung wird angenommen, dass unterschiedliche Faktoren wirksam sind (sonst wäre die Schichtung entbehrlich).

Soll die Schwankungsbreite  $B_i$  in der Schicht  $S_i$  sein und die zugeteilte Menge  $p_i G$  nicht ausreichen, dann muss die Schichtungsanalysemenge  $m_i$  erhöht werden,  $m_i > p_i G$ . Da die Ausgewogenheit des Stichprobenplans erhalten bleiben muss, wird die Anteilsschätzung  $\hat{\theta}_i$  der Fraktionen mit der Menge  $m_i$  in der Gesamtanalyse übernommen, aber als Menge wird auch in der Gesamtanalyse  $p_i G$  für diese Schicht eingefügt. Eine Verringerung der Masse in der Auswertung ist zulässig, eine Erhöhung der Masse als Rechengröße (höher als die tatsächlich analysierte Masse) ist **unzulässig**, da eine Verfälschung der Schwankungsbreiten folgen würde.

Bei der Untersuchung weiterer Faktoren (Schichtungen) ist zu unterscheiden, ob die Faktoren hierarchisch oder gegenseitig nachgewiesen werden sollen.

### III.6.1 Hierarchische Schichtung

Die erste Schichtung entspreche einer räumliche Schichtung (etwa Bezirke). Die nächste Schichtung sei eine zeitliche Schichtung (Saisonale Komponente). Die zeitliche Schichtung soll innerhalb einer ersten  $S_i$  Schicht (innerhalb eines Bezirks) untersucht werden. Dann wird eine notwendige Probenmasse ermittelt und gemäß der aktuellen Sammelmengen in der gleichen Schichtung aufgeteilt. Die Probenmasse der Schicht  $S_i$  (Bezirk  $i$ ) wird gemäß den Sammelanteilen  $p_{ij}$  der zweiten Schicht  $j$  (Saison  $j$ ) aufgeteilt. Wenn die resultierenden Mengen dann für die Genauigkeitsanforderungen an die zweite Schichtung nicht erfüllt werden, muss die Probemenge entsprechend erhöht werden.

### III.6.2 Gebundene Schichtung

Die beiden Schichtungen sollen unabhängig voneinander Genauigkeitsanforderungen erfüllen und getrennt analysiert werden. Die zweite Schichtung (beispielsweise Saison) hat eigene Mengenvorgaben und entsprechend eigene Mindestmengen. Dann sind die Anforderung an die Analysemenen  $m_{ij}$  einerseits

$$m_{ij} = p_{ij}G_{i\cdot} \quad \text{und} \quad m_{ij} = p_{ij}G_{\cdot j} ,$$

wenn  $G_{i\cdot}$  die vorgegebene Mindestmenge in der ersten Schicht  $i$  und  $G_{\cdot j}$  die vorgegebene Mindestmenge in der zweiten Schicht  $j$  ist und andererseits auch

$$\sum_i m_{ij} = G_{i\cdot}$$

und

$$\sum_j m_{ij} = G_{\cdot j}$$

erfüllen. Für die Mengen  $m_{ij}$  ergibt sich ein lineares Gleichungssystem. Aber die Lösungen dieses Gleichungssystem werden im allgemeinen nicht positiv sein. (Falls die Lösungen eindeutig sind.) Die Probemassen müssen erhöht werden, sodass zumindest

$$\sum_i m_{ij} \geq G_{i\cdot}$$

und

$$\sum_j m_{ij} \geq G_{\cdot j}$$

erfüllt sein. Dafür existieren Optimierungsverfahren (Pivoting), die zu optimalen Lösungen (mit minimalen Mengen  $m_{ij}$ ) führen. Solche Verfahren erhöhen zuerst für den größten Fehlwert die Menge und iterieren dann für alle anderen Werte. Die Beschreibung solcher Verfahren ist der mathematischen Literatur zu entnehmen. Der Empfehlung in Abschnitt I folgend, kann auf eine solche aufwendige Berechnung der Mengen durch Vorgabe der Genauigkeit nur für eine (die wichtigste) Schichtung verzichtet werden. Bei unterschiedlichen Genauigkeitsvorgaben muss, wie in Abschnitt I beschrieben, die maximale erforderliche Analysemasse gewählt werden.

## Abschnitt IV

# Nettofaktoren

Für die Massen von Verpackungsfractionen sollen die Anteile von *Anhaftungen* bestimmt werden. Dazu wird in einem eigenen Verfahren die Netto-Masse der Fraktion durch Entfernung der Anhaftung und Trocknung bestimmt. Das Ergebnis ist der Nettofaktor  $a < 1$ , der den Prozentanteil der Fraktionsmasse ohne Anhaftungen angibt. Der Faktor ist für verschiedene Fraktionen unterschiedlich.

In einer Voruntersuchung wurde der Nettofaktor für Verpackungsfractionen bestimmt. Die Ergebnisse dieser Voruntersuchung bilden die Vergleichsgrundlage für die folgenden methodischen Aussagen. In der Voruntersuchung wurden verschiedene Fraktionen von Anhaftungen befreit, wobei in einem Prozessdurchgang durchschnittlich 185.63g Nettomasse der untersuchten Fraktion übrig blieb. Die Bruttomasse betrug 241.67g, so ergab sich ein durchschnittlicher Nettofaktor von  $a = 0.768$ , daher waren durchschnittlich 23.2% der Bruttomassen Anhaftungen.

Die Analyse des Nettofaktors basiert auf demselben Multinomialmodell wie die allgemeine statistische Analyse. Es wird eine (fiktive) weitere Fraktion *Anhaftungen* hinzugefügt. Obwohl diese Fraktion natürlich nicht tatsächlich gewogen wird, unterscheidet sich die formale Berechnung nicht von den gemessenen Anteilen. Auch die Genauigkeitsanalyse (Konfidenzintervall) folgt denselben Formeln. Für die Untersuchung der Nettogewichte wird stochastische Unabhängigkeit von der Sortieranalyse angenommen.

### IV.1 Analysemengen

Die basierende Voruntersuchung umfasste ca. 50 kg Analysematerial. Die Ergebnisse dienen als Ausgangspunkt für eine a-priori Schätzung des Nettofaktors  $a$ , womit eine benötigte Analysemenge um eine vorgegebene Schwankungsbreite (Länge des 95%-tigen Konfidenzintervalls) für den Nettofaktor zu erreichen.

Die Länge des Konfidenzintervalls und damit auch die Mindestanalysemenge hängt vom festgestellten Nettofaktor ab. In der Folge werden die Mindestmengen für Schwankungsbreite von  $\pm 0.5\%$ ,  $\pm 1\%$ ,  $\pm 2\%$ ,  $\pm 3\%$ ,  $\pm 4\%$  und  $\pm 5\%$  bestimmt.

Als Analyseeinheit ('Stückgewicht') wird 185.63g eingesetzt.

#### IV.1.1 Schwankungsbreite $\pm 0.5\%$

Für Nettofaktorwerte zwischen  $a = 0.6$  und  $a = 0.95$  ergeben sich folgende Mindestanalysemengen um die Schwankungsbreite von  $\pm 0.5\%$  bei 95% Überdeckungswahrscheinlichkeit zu erreichen:

Nettofaktor $a$	Mindestanalysemenge
0.6	6822 kg
0.65	6466 kg
0.7	5969 kg
0.75	5330 kg
0.8	4548 kg
0.85	3624 kg
0.9	2559 kg
0.95	1353 kg

#### IV.1.2 Schwankungsbreite $\pm 1\%$

Nettofaktor $a$	Mindestanalysemenge
0.6	1705 kg
0.65	1616 kg
0.7	1492 kg
0.75	1332 kg
0.8	1137 kg
0.85	906 kg
0.9	640 kg
0.95	340 kg

#### IV.1.3 Schwankungsbreite $\pm 2\%$

Nettofaktor $a$	Mindestanalysemenge
0.6	426 kg
0.65	404 kg
0.7	373 kg
0.75	333 kg
0.8	284 kg
0.85	226 kg
0.9	160 kg
0.95	87 kg

#### IV.1.4 Schwankungsbreite $\pm 3\%$

Nettofaktor $a$	Mindestanalysemenge
0.6	189 kg
0.65	179 kg
0.7	165 kg
0.75	148 kg
0.8	126 kg
0.85	101 kg
0.9	72 kg
0.95	40 kg

#### IV.1.5 Schwankungsbreite $\pm 4\%$

Nettofaktor $a$	Mindestanalysemenge
0.6	106 kg
0.65	100 kg
0.7	93 kg
0.75	83 kg
0.8	71 kg
0.85	57 kg
0.9	40 kg
0.95	23 kg

#### IV.1.6 Schwankungsbreite $\pm 5\%$

Nettofaktor $a$	Mindestanalysemenge
0.6	68 kg
0.65	64 kg
0.7	59 kg
0.75	53 kg
0.8	45 kg
0.85	36 kg
0.9	26 kg
0.95	15 kg

### IV.2 Genauigkeit der Nettoanteile

Die Sortieranalyse sieht Genauigkeitsanforderungen für Fraktionsanteile vor. Für die Nettoanteile ergeben sich geänderte Genauigkeiten. Wenn  $p$  der Bruttoanteil einer Fraktion und  $a$  der zugehörige

Nettofaktor ist, dann ist  $p_n = p.a$  ein Schätzwert für den Nettoanteil dieser Fraktion. Die Schwankungsbreite von  $p_n$  und damit die Aussagekraft von  $p_n$  sind geändert. Das wirkt sich insbesondere auf Mengenschätzungen für Fraktionen aus der Sammlung aus.

Zunächst reduziert sich das Signifikanzniveau. Werden  $p$  und  $a$  jeweils mit 95% bestimmt, so ist die Überdeckungswahrscheinlichkeit für  $p_n$  nur mehr 90.25%. Die Schwankungsbreite der Nettofraktionsanteile kann erheblich größer als die Schwankungsbreite der Bruttoanteile werden.

Als Fehlerfortpflanzung der Schwankungsbreite kann man allgemein die Formel

$$S_{netto} = S_a \cdot p + a \cdot S_p$$

ansetzen. Dabei bezeichnet  $S_a$  die Schwankungsbreite des Nettofaktors  $a$ ,  $S_p$  die Schwankungsbreite des Bruttoanteils  $p$  der Fraktion und  $S_{netto}$  die resultierende Schwankungsbreite für den Nettoanteil  $p_n$ . Um Vergleichbarkeit mit selben Überdeckungswahrscheinlichkeiten zu erreichen, ergibt eine grobe Abschätzung für die Schwankungsbreite des Nettoanteils

$$S_{netto} * 1.14235 = S_{netto} * \frac{u_{\sqrt{0.975}}}{u_{0.975}}$$

mit dem  $\alpha$ -Normalverteilungsquantile  $u_\alpha$ .

Betrachtet man eine Fraktion mit 20% Bruttoanteil, der eine Schwankungsbreite von  $\pm 1\%$  besitzt. Dann bringt ein Nettofaktor  $a = 0.95$  mit Schwankungsbreite von  $\pm 5\%$  für den Nettoanteil  $p_n = 0.19$  eine Schwankungsbreite von 2.23% mit sich. Nach der obigen Abschätzung ist die Netto-Schwankungsbreite bei vergleichbarer Überdeckungswahrscheinlichkeit mehr als doppelt so groß.

# Literatur

- [1] L. FAHRMEIR, R. KÜNSTLER , I. PIGEOT UND G. TUTZ . *Der Weg zur Datenanalyse* . Springer, 2007.
- [2] L. FAHRMEIR,A. HAMERLE, G. TUTZ *Multivariate Statistische Verfahren* . Walter de Gruyter, 1996.
- [3] J. HARTUNG. *Statistik*. Oldenburg, 2009.
- [4] J. HARTUNG, B. ELPELT. *Multivariate Statistik, Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. Oldenbourg 2006.
- [5] F. POKROPP . *Stichproben: Theorie und Verfahren*. Oldenburg, 1996.
- [6] L. SACHS. *Angewandte Statistik* . Springer, 2004.
- [7] L. SACHS. *Statistische Auswertungsmethoden*. Springer, 1999.
- [8] S. SINGH. *Advanced sampling theory with applications*. Springer, 2003.